Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Лубков Роман Алексеевич

Надгруппы элементарных подгрупп редуктивных групп в неприводимых представлениях

1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
В. А. Петров

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

Введение

Объектом исследования являются редуктивные группы и их неприводимые представления над произвольным коммутативным кольцом, **предметом исследования** является их структура и свойства. **Цель исследования** заключается в классификации всех надгрупп элементарных подгрупп редуктивных групп в неприводимых представлениях.

Актуальность темы. На основе классификации конечных простых групп в 1984 году Майкл Ашбахер [36] доказал Subgroup Structure Theorem, которая утверждает, что каждая максимальная подгруппа конечной классической группы либо попадает в один из восьми явно описанных классов $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$, либо является "почти" простой группой в некотором неприводимом представлении, попадая в класс $\mathcal{S}$. Идеологию проекта и идеи доказательств можно также найти в его обзоре [37]. Позже, используя теорию алгебраических групп, Мартин Либек и Гэри Зайтц предложили гораздо более простое доказательство этой теоремы [77].

В течении последних десятилетий многие исследователи изучали подгруппы групп из классов Ашбахера. Однако, практически все результаты были получены для некоторых частных случаев полей. Например, в случае конечного поля Питер Клейдман и Мартин Либек полностью исследовали максимальность подгрупп в книге [66]. Роджер Дай, Оливер Кинг, Шанчжы Ли и другие авторы доказали максимальность групп из классов Ашбахера для произвольных полей или описали их надгруппы в тех случаях, когда они не являются максимальными, см. [51—53; 63—65; 69; 74; 75].

Первые попытки переноса результатов на случай произвольного кольца были предприняты Зеноном Боревичем и Николаем Вавиловым [3; 5] для класса Ашбахера $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$, начав большой цикл работ по описанию надгрупп определенных групп из классов Ашбахера [7—12; 17—19; 30; 80; 88; 89]. Сегодня данная проблема остается очень актуальной, что подтверждается большим количеством недавних публикаций, посвященных этому кругу задач. Далее мы приводим последние результаты, полученных в этой области. Мы рекомендуем обзоры [7; 20; 97], которые содержат необходимые предварительные сведения, полную историю и дальнейшую библиографию.

С точки зрения Maximal Subgroup Classification Project к упомянутому классу Ашбахера $\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2$ относится описание надгрупп subsystem subgroups. Эта область активно изучалась Алексеем Степановым, Николаем Вавиловым и другими авторами [5; 22; 35]. Для класса $\mathcal{C}_8$ в 2000-х годах надгруппы классических групп были полностью описаны специалистами из петербургской [17—19; 80] и независимо китайской школ [98; 103—105]. В дальнейшем работа была продолжена Александром Лузгаревым, который получил аналогичные результаты для исключительных групп [14; 15; 23—25]. Изучение надгрупп групп из класса $\mathcal{C}_5$, так называемое subrings subgroups, началось с результатов Николая Романовского, Якова Нужина и Анны Якушевич [26—28]. Позже Алексей Степанов получил (почти) окончательные результаты в этом классе: для $GL_n(R)$ и $EO_{2l}(R)$ описание надгрупп как правило не стандартно [88; 89], а для $Sp_{2l}(R)$, $SO_{2l+1}(R)$ и группы Шевалле типа F_4 описание всегда стандартно при определенных предположениях на кольцо R, таких как $2 \in R^*$ [90]. Для класса $\mathcal{C}_4+\mathcal{C}_7$ существуют лишь отдельные результаты, такие как частичное описание надгрупп тензорного произведения элементарных групп, см. [1; 2]. Напомним, что над полем описание надгрупп тензорного произведения $SL_n(K)$ и $SL_m(K)$ следует из работы Шанчжы Ли [73]. Для класса $\mathcal{C}_3$ описание надгрупп, ring extension subgroups, неимоверно трудоемко. Лишь для полной линейной группы Шанчжы Ли описал надгруппы для произвольного конечного расширения полей [70; 72]. Над полем он также описал надгруппы групп из класса $\mathcal{C}_4$, но не из $\mathcal{C}_7$ [68; 71; 73; 76].

Отметим еще один тесно связанный цикл работ Владимира Платонова, Драгомира Дьоковича, Роберта Гуральника, Уильяма Уотерхауза и других [49; 50; 55—59; 81; 82; 102] о надгруппах полупростых групп, которые возникают в связи с linear preserver problems. В этих статьях рассматриваются такие задачи как описание надгрупп образа элементарной группы в присоединенном вложении. Для произвольных колец многие задачи до сих пор не решены, существуют лишь результаты для классических полей, таких как $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

Степень разработанности проблемы. Настоящая работа относится к исключительному классу Ашбахера $\mathcal{S}$, состоящему из почти простых групп в некоторых абсолютно неприводимых представлениях. До сих пор для произвольных колец практически нет никаких результатов для этого класса. Отметим лишь два самых тесных направления исследования, связанные с темой работы. Для конечных полей Брюс Куперстейн доказал максимальность нормализатора элементарной группы в бивекторном представлении [45]. А для поливекторного представления над алгебраически замкнутым полем описание надгрупп элементарной группы следует из результатов Гари Зайтца о максимальных подгруппах классических алгебраических групп [42; 87].

Используемые методы. Для описания надгрупп используется основная схема изучения, разработанная Вавиловым и Боревичем. Однако, так как исследование относится к исключительному классу Ашбахера, то необходимо применять модифицированные или даже новые методы к решению задачи. В работе используется метод обратного разложения унипотентов, лемма Уотерхауза об изоморфизме алгебраических схем, метод извлечения нетривиальной трансвекции из промежуточной подгруппы, основанный на понятии общего элемента и другие результаты и методы теории представлений и теории инвариантов.

Апробация результатов. Все основные методы и результаты диссертации являются новыми, снабжены подробными доказательствами и опубликованы в реферируемых научных журналах, что свидетельствует об их достоверности [106—110]. В случае работ в соавторстве автор старался подробно излагать только собственный вклад, но, естественно, такое строгое разделение не всегда можно провести последовательно: в работе [107] автору принадлежат Теоремы 5–7, посвященные поиску уравнений на схему $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n$ и геометрической интерпретации этих уравнений, а в работе [108] автору принадлежат результаты, связанные с вычислением транспортеров и нормализаторов групп Шевалле.

Методы и основные результаты данной работы были представлены в виде постеров и пленарных докладов на следующих конференциях:

- Школа–конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", 2017;
- Modern Algebraic Geometry, Пекинский университет, Китай, 2018;
- Школа–конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", 2020.

Автор выступал по тематике диссертации на семинарах:

- Алгебраический семинар им. Д. К. Фаддеева, ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, 2017;
- Алгебраические группы, СПбГУ, Санкт-Петербург, 2021.

Работа носит **теоретический характер**, её результаты могут применяться в теории линейных алгебраических групп, при проведении учебных и научных семинаров.

Структура работы. Работа состоит из четырех глав и заключения. Первая глава посвящена всем технически сложным вычислениям, которые связаны с описанием надгрупп элементарных групп. Построен нижний уровень промежуточной подгруппы, вычислены нормализаторы связных промежуточных подгрупп. Во второй главе мы обсуждаем структуру полной линейной группы в поливекторных представлениях. В §2.1 напоминаем необходимые известные результаты для описания $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ через стабилизатор многочленов Плюккера. В §§2.2–2.3 строим инвариантные формы, которые задают $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$. Над полем данные формы классически известны. Мы доказываем, что соответствующая групповая схема гладкая, из чего следует, что построенные формы инвариантны для произвольного коммутативного кольца. Используя эту идею, в §2.4 мы описываем нормализатор элементарной подгруппы.

Третья глава содержит результаты, связанные с разложением унипотентов и его вариаций. Доказаны теоремы стабилизации, построены несколько серий уравнений, задающих полную линейную группу в поливекторных представлениях, а также разработана идея обратного разложения унипотентов.

В четвертой главе развит новый метод, позволяющий изучить решетку подгрупп в группе Шевалле, содержащих образ элементарной подгруппы некоторой другой группы Шевалле. Представлено применение этого инструмента для задачи диссертации.

Наконец, в заключении приводится описание основных результатов, которые **выносятся на защиту**, а также описываются дальнейшие направления исследования.

1. Фундаментальные представления полной линейной группы

1.1. Основные обозначения. На протяжении всей работы нам потребуются следующие базовые обозначения, которые полностью стандартны в контексте групп Шевалле.

Пусть вначале G — произвольная абстрактная группа. Под $[x, y]$ мы всегда будем понимать *левонормированный* коммутатор элементов x и y, то есть $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, где $x, y \in G$. Кратные коммутаторы также будут левонормированы: $[x, y, z] = [[x, y], z]$. Выражение xyx^{-1} кратко будем записывать ${}^{x}y$ и называть *левым сопряжённым* к y при помощи x. Аналогично, выражение $x^{-1}yx$ будем называть *правым сопряжённым* к y при помощи x и обозначать как y^{x}. Правым сопряжённым к y при помощи x или x^{-1} будем обозначать как $y^{\pm x}$. В дальнейшем мы будем пользоваться тождеством Холла–Витта, которое выглядит следующем образом:

$$[x, y^{-1}, z^{-1}]^{x} \cdot [z, x^{-1}, y^{-1}]^{z} \cdot [y, z^{-1}, x^{-1}]^{y} = e.$$

Пусть $X \subseteq G$ — подмножество группы G, тогда под $\langle X \rangle$ будем понимать подгруппу G, порождённую X. Выражение $H \leqslant G$ понимается, как H — подгруппа G. Если H — нормальная подгруппа в G, тогда будем писать $H \trianglelefteq G$. В случае если $H \leqslant G$, запись $\langle X \rangle^{H}$ означает наименьшую подгруппу G, которая содержит X и которая нормализуется H. Под $[F, H]$ для двух подгрупп $F, H \leqslant G$ мы понимаем их взаимный коммутант: $[F, H] = \langle [f, g],\ \text{где } f \in F, h \in H \rangle$.

Теперь пусть E, F — две подгруппы группы G. Транспортером подгруппы E в подгруппу F называется множество

$$\mathrm{Tran}_G(E, F) = \{g \in G \mid E^{g} \leqslant F\}.$$

На самом деле мы в основном будем использовать это понятие в случае, когда $E \leqslant F$, и тогда

$$\mathrm{Tran}_G(E, F) = \{g \in G \mid [g, E] \leqslant F\}.$$

Также нам пригодятся некоторые элементарные обозначения из теории колец. Предположим, что R произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Под идеалом I кольца R мы всегда будем понимать *двусторонний* идеал и обозначать это как $I \trianglelefteq R$. Как обычно, запись R^* означает мультипликативную группу кольца R. Мультипликативная группа матриц над кольцом R называется полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}_n(R) = M_n(R)^*$, а специальная линейная группа $\mathrm{SL}_n(R)$ это подгруппа $\mathrm{GL}_n(R)$, содержащая матрицы с определителем равным 1. Для любой матрицы $a \in \mathrm{GL}_n(R)$ элемент, стоящий на месте (i, j), обозначается $a_{i,j}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Для записи элементов обратной матрицы a^{-1} мы будем пользоваться стандартным обозначением $a'_{i,j} := (a^{-1})_{i,j}$, а для j-ого столбца или i-ой строки матрицы a будем писать $a_{*,j}$ и $a_{i,*}$.

Напомним, что e обозначает единичную матрицу, а $e_{i,j}$ — стандартную матричную единицу, то есть матрицу, у которой все элементы равны нулю, за исключением одного на месте (i,j), который равен 1. Элементарной трансвекцией $t_{i,j}(\xi)$ называется матрица вида $t_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{i,j}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in R$. Элементарные трансвекции обладают следующими хорошо известными свойствами, см. [91]:

(1) трансвекции аддитивны по аргументу:

$$t_{i,j}(\xi)t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi + \zeta).$$

(2) они удовлетворяют коммутационной формуле Шевалле:

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = \begin{cases} e, & \text{если } j \neq h, i \neq k, \\ t_{i,k}(\xi\zeta), & \text{если } j = h, i \neq k, \\ t_{h,j}(-\zeta\xi), & \text{если } j \neq h, i = k. \end{cases}$$

Подгруппа $E_n(R) \leqslant GL_n(R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется (*абсолютной*) *элементарной подгруппой* полной линейной группы:

$$E_n(R) = \langle t_{i,j}(\xi), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in R \rangle.$$

Так как при $n \geqslant 2$ группа $E_n(R)$ абсолютно неприводима, то есть аддитивно порождает $M_n(R)$, то из этого легко вычислить централизатор элементарной группы $C_{M_n(R)}\big(E_n(R)\big) = Re$ и $C_{GL_n(R)}\big(E_n(R)\big) = C_n(R) = \lambda e$, $\lambda \in R^*$ — центр группы $GL_n(R)$. В частности, $C\big(E_n(R)\big) = \mu_n(R)$ — группа корней из 1 степени n в кольце R.

Теперь определим нормальную подгруппу элементарной группы $E_n(R)$, которая играет ключевую роль в вычислении уровня промежуточных подгрупп. Для произвольного идеала $I \trianglelefteq R$ рассмотрим подгруппу $E_n(R,I)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями уровня I, то есть $E_n(R,I)$ является нормальным замыканием группы $E_n(I)$ в $E_n(R)$. Такая группа называется (*относительной*) *элементарной группой уровня* I:

$$E_n(R,I) = \langle t_{i,j}(\xi), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in I \rangle^{E_n(R)}.$$

В случае коммутативного кольца R теорема Суслина [33] утверждает, что при $n \geqslant 3$ группа $E_n(R,I)$ нормальна не только в $E_n(R)$, но и в $GL_n(R)$. Кроме того при тех же предположениях верно, что группа $E_n(R,I)$ порождается элементами вида $z_{i,j}(\xi,\zeta) = t_{j,i}(\zeta)t_{i,j}(\xi)t_{j,i}(-\zeta)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in I, \zeta \in R$. Этот факт доказали Андрей Суслин и Леонид Васерштейн в совместной работе [21].

Через R^n обозначим свободный R-модуль. Он состоит из столбцов с координатами из кольца R. Стандартный базис R^n обозначим $e_1, \dots, e_n$. Пусть P_m — (стандартная) параболическая подгруппа координатного подпространства $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$. Она равна стабилизатору $\mathrm{Stab}\big(\langle e_1, \ldots, e_m\rangle\big)$. Ее сопряженные называются параболическими типа P_m. Далее, пусть U_m — подгруппа P_m, порождённая элементарными трансвекциями $t_{i,j}(\xi)$, где $1 \leqslant i \leqslant m, m+1 \leqslant j \leqslant n, \xi \in R$. Она называется унипотентным радикалом P_m. Очевидно, что U_m — нормален и абелев.

Через $[n]$ мы будем обозначать множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, а через $\bigwedge^m[n]$ внешнюю степень множества $[n]$, элементы которого, есть упорядоченные подмножества $I \subseteq [n]$ мощности m без повторений:

$$\textstyle\bigwedge^m[n] = \{(i_1, i_2, \ldots, i_m) \mid i_j \in [n]\}.$$

Мы будем использовать лексикографический порядок на множестве $\bigwedge^m[n]$: $12\ldots(m-1)m < 12\ldots(m-1)(m+1) < \ldots$ Обычно мы пишем индекс $I = \{i_j\}_{j=1}^m$ в возрастающем порядке, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Знак $\mathrm{sgn}(I)$ индекса $I = (i_1, \ldots, i_m)$ равен знаку перестановки, отображающей $(i_1, \ldots, i_m)$ в это же множество в возрастающем порядке, например, $\mathrm{sgn}(1234) = \mathrm{sgn}(1342) = +1$, но $\mathrm{sgn}(1324) = \mathrm{sgn}(4123) = -1$. Более того, мы определим знак от двух пересекающихся индексов I, J следующим образом. Пусть $I \cap J = K$, тогда $\mathrm{sgn}(I, J) := \mathrm{sgn}(K\bar{I}, K\bar{J})\,\mathrm{sgn}(I \mapsto K\bar{I})\,\mathrm{sgn}(J \mapsto K\bar{J})$, где первый знак по определению равен $\mathrm{sgn}(\bar{I}, \bar{J})$, а последний два определяются аналогично обычному знаку как количество транспозиций в перестановке индексов I и J в индексы $K\bar{I}$ и $K\bar{J}$ соответственно. Например, $\mathrm{sgn}(1235, 1246) = \mathrm{sgn}(35, 46)(+1)(+1) = -1$, а $\mathrm{sgn}(1235, 1346) = \mathrm{sgn}(25, 46)(-1)(+1) = +1$. Мы расширим определение знака до мультимножеств, положив $\mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m) = 0$, если среди набора $i_1, \ldots, i_m$ есть одинаковые числа. Для произвольного индекса $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \in \bigwedge^m[n]$, $\{i_1, \ldots \widehat{i_p}, \ldots, i_m\}$ будет обозначать индекс $I \setminus i_p \in \bigwedge^{m-1}[n]$.

Наконец, пусть R — коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$ и $m \leqslant n$. *Через* N *мы будем обозначать биномиальный коэффициент* $\binom{n}{m}$. В дальнейшем мы используем обозначение $t_{I,J}(\xi)$ для элементарной трансвекции в группе $E_N(R)$. Индексы I, J будем писать без скобок в возрастающем порядке, например, трансвекция $t_{12,13}(\xi)$ равна матрице, у которой стоят единицы на диагонали и ξ в позиции $(12, 13)$.

1.2. **Внешние степени элементарных групп.** Пусть R — коммутативное кольцо с 1, $n \geqslant 3$ и R^n — свободный R-модуль со стандартным базисом e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Через $\bigwedge^m R^n$ обозначим универсальный объект в категории знакопеременных m-линейных отображений R^n в R-модули. В качестве $\bigwedge^m R^n$ можно взять свободный модуль ранга N с базисом $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тем не менее мы также определим базисные элементы $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ для любого набора $i_1, \ldots, i_m$ следующим образом: $e_{\sigma(i_1)} \wedge \ldots \wedge e_{\sigma(i_m)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ для любой перестановки σ в симметрической группе S_m.

Далее для каждого m определим $\bigwedge^m$ как гомоморфизм из $\mathrm{GL}_n(R)$ в $\mathrm{GL}_N(R)$, заданный по правилу

$$\textstyle\bigwedge^m(g)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}) := (ge_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (ge_{i_m})$$

для всех $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m} \in R^n$. Таким образом в базисе e_I, $I \in \bigwedge^m[n]$ матрица $\bigwedge^m(g)$ состоит из определителей m-ого порядка матрицы g, лексикографически упорядоченных по строкам и столбцам:

$$\Big(\bigwedge^m(g)\Big)_{I,J} = \Big(\bigwedge^m(g)\Big)_{(i_1,\ldots,i_m),(j_1,\ldots,j_m)} = \Delta^{j_1,\ldots,j_m}_{i_1,\ldots,i_m}(g).$$

Так как $\bigwedge^m\colon \operatorname{GL}_n(R) \longrightarrow \operatorname{GL}_N(R)$ является гомоморфизмом, то мы определили представление степени N группы $\operatorname{GL}_n(R)$, которое называется m-*векторным представлением* или m-*ым фундаментальным представлением* (*представлением со старшим весом* ϖ_m). Образ этого действия называется m-ой внешней степенью группы $\operatorname{GL}_n(R)$. Так как $\operatorname{E}_n(R)$ подгруппа $\operatorname{GL}_n(R)$, то внешняя степень элементарной группы также является корректно определенной группой. Следующая лемма является элементарным следствием теоремы Суслина:

Лемма 1. *Образ элементарной группы нормален в образе полной линейной группы под действием гомоморфизма внешней степени:*

$$\bigwedge^m\Big(\operatorname{E}_n(R)\Big) \trianglelefteq \bigwedge^m\Big(\operatorname{GL}_n(R)\Big).$$

Отметим что $\bigwedge^m\Big(\operatorname{GL}_n(R)\Big)$ не совпадает с $\bigwedge^m \operatorname{GL}_n(R)$ для произвольных колец. Первая группа это образ полной линейной группы под действием гомоморфизма Бине–Коши: $\bigwedge^m\colon \operatorname{GL}_n(R) \longrightarrow \operatorname{GL}_{\binom{n}{m}}(R)$, в то время как вторая это группа R-точек групповой схемы $\bigwedge^m \operatorname{GL}_n$. Так как эпиморфизмы алгебраических групп на точках не сюрьективны, то для колец группа $\bigwedge^m \operatorname{GL}_n(R)$ строго больше, чем $\bigwedge^m\Big(\operatorname{GL}_n(R)\Big)$. Как мы покажем в главе 2, элементы $\bigwedge^m \operatorname{GL}_n(R)$ по прежнему являются образами матриц, но коэффициенты не из самого кольца, а из какого-то его расширения. То есть для любого коммутативного кольца R элементы $\widetilde{g} \in \bigwedge^m \operatorname{GL}_n(R)$ представляются в виде $\widetilde{g} = \bigwedge^m g$, $g \in \operatorname{GL}_n(S)$, где S — какое-то расширение кольца R. Мы отсылаем читателя к работе [16], где данный вопрос был раскрыт в полной мере.

Следующая характеризация элементарной группы играет ключевую роль во всей работе. Она вытекает из более общих результатов Энтони Бака, Рузби Хазрата и Николая Вавилова см. [38; 39; 60]. Заметим, что в указанных работах в явном виде следующий результат не формулировался, но он сразу получается из существования нильпотентной фильтрации $\operatorname{GL}_n(R)$.

Лемма 2. *Пусть* R *— Нетерово коммутативное кольцо,* $n \geqslant 3$*. Тогда группа* $\operatorname{E}_n(R)$ *является наибольшей совершенной подгруппой в* $\operatorname{GL}_n(R)$*.*

Другими словами, элементарная подгруппа является *совершенным радикалом* полной линейной группы. Откуда сразу вытекает, что элементарная подгруппа вполне характеристическая для Нетеровых колец. Очевидно, что тогда и $\bigwedge^m \operatorname{E}_n(R)$ тоже будет совершенным радикалом $\mathrm{GL}_N(R)$. В дальнейшем, используя индуктивную систему всех конечно порожденных подколец в R по отношению к вложению, мы будем использовать эти факты для сведения интересующих нас вопросов к Нетеровым кольцам.

Лемма 3. *Пусть* $R_i, i \in I$ — *индуктивная система колец. Тогда*

$$\mathrm{GL}_n(\varinjlim R_i) = \varinjlim \mathrm{GL}_n(R_i), \quad \mathrm{E}_n(\varinjlim R_i) = \varinjlim \mathrm{E}_n(R_i).$$

Для полной линейной группы это утверждение общеизвестно, оно вытекает из того, что GL_n это аффинная групповая схема. А так как элементарная группа порождена группами точек аффинных групповых схем $X_{i,j}$, то для E_n это утверждение также верно.

Заметим, что $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ нормальна не только в образе полной линейной группе, но в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Следующий результат является чрезвычайно частным случаем Теоремы 1 работы Виктора Петрова и Анастасии Ставровой [29].

Теорема 4. *Пусть* R — *коммутативное кольцо,* $n \geqslant 3$*, тогда* $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \trianglelefteq \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Для внешних степеней полной линейной группы внешний квадрат играет особое значение. Во всех задачах, связанных с вычислением надгрупп, нормализаторов $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ в $\mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R)$, построением инвариантных форм, задающих группу $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ и многих других, внешний квадрат выгодно отличается от общего случая. Во-первых, доказательства технически сложных утверждений в общем случае часто являются общением более простых доказательств для внешнего квадрата, а во-вторых, для внешнего квадрата верны некоторые результаты, которые невозможно получить даже для внешнего куба или других степеней. Например, в разделе 3.1 мы построим трансвекцию $T_{*,j} \in \bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$, которая будет стабилизировать произвольный столбец матрицы g в $\mathrm{GL}_{\binom{n}{2}}(R)$, при этом аналогов этой трансвекции для других внешних степеней не существует.

Пусть $x \in \mathrm{E}_n(R)$, тогда элементарными вычислениями, основанными на гомоморфизме Бине–Коши, внешняя степень x может быть представлена как произведение элементарных трансвекций в $\mathrm{E}_N(R)$:

Утверждение 5. *Пусть* $t_{i,j}(\xi)$ — *элементарная трансвекция в группе* $\mathrm{E}_n(R)$*,* $n \geqslant 3$*. Тогда*

$$\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \prod_{L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]} t_{L \cup i, L \cup j}(\operatorname{sgn}(i,L)\operatorname{sgn}(j,L)\xi) \tag{1}$$

для любых $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Аналогично можно получить явный вид элементов тора $h_{\varpi_m}(\xi)$ группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Утверждение 6. *Пусть* $d_i(\xi) = e + (\xi - 1)e_{i,i}$ — *элементарное псевдоотражение,* $1 \leqslant i \leqslant n$*. Тогда внешняя степень* $d_i(\xi)$ *равна диагональной матрице, которая от-*

личается от единичной матрицы ровно в $\binom{n-1}{m-1}$ *позициях. А именно,*

$$\bigwedge^m\Big(d_i(\xi)\Big)_{I,I} = \begin{cases} \xi, & \textit{если } i \in I, \\ 1, & \textit{иначе.} \end{cases} \qquad (2)$$

В качестве примера рассмотрим $\bigwedge^3 t_{1,3}(\xi) = t_{124,234}(-\xi)t_{125,235}(-\xi)t_{145,345}(\xi) \in \bigwedge^3 E_5(R)$ и $\bigwedge^4 d_2(\xi) = \mathrm{diag}(\xi,\xi,\xi,1,\xi) \in \bigwedge^4 E_5(R)$. Из этих утверждений следует, что $\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) \in E_N^{\binom{n-2}{m-1}}(R)$, где по определению каждый элемент множества $E_N^M(R)$ это произведение не более чем M элементарных трансвекций. То есть вычет трансвекции $\mathrm{res}\Big(\bigwedge^m t_{i,j}(\xi)\Big)$ равен биномиальному коэффициенту $\binom{n-2}{m-1}$. Напомним, что вычетом $\mathrm{res}(g)$ преобразования g называется ранг $g - e$. Кроме этого легко связать определитель матрицы $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ и определитель $\bigwedge^m g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, см. доказательство Теоремы 4 в [100]:

$$\det \bigwedge^m g = \Big(\det g\Big)^{\binom{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} = \Big(\det g\Big)^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

1.3. **Техника элементарных вычислений.** Для произвольной внешней степени вычисления с элементарными трансвекциями выглядят громоздко. В этом параграфе мы систематизируем всевозможные расчеты коммутатора элементарной трансвекции с внешней трансвекцией.

Утверждение 7. *С точностью до действия симметрической группы существует три типа коммутаторов с фиксированной трансвекцией* $t_{I,J}(\xi) \in E_N(R)$:

(1) $[t_{I,J}(\xi), \bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = 1$, *если* $i \notin I$ *и* $j \notin J$;

(2) $[t_{I,J}(\xi), \bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta\xi)$, *если либо* $i \in I$, *либо* $j \in J$. *И тогда* $\tilde{I} = I\backslash i \cup j$ *или* $\tilde{J} = J\backslash j \cup i$ *соответственно;*

(3) *Если* $i \in I$ *и* $j \in J$, *тогда выполнено гораздо более сложное равенство:*

$$[t_{I,J}(\xi), \bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi)\cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi)\cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi).$$

Заметим, что последнее равенство верно всякий раз, когда $I \setminus i \neq J \setminus j$, в противном случае мы получаем $[t_{I,J}(\xi), t_{J,I}(\pm\zeta)]$. Этот коммутатор не может быть представлен в более простой форме.

1.4. **Вычисление уровня.** Пусть H — надгруппа внешней степени элементарной группы $\bigwedge^m E_n(R)$:

$$\bigwedge^m E_n(R) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}_N(R).$$

Рассмотрим два индекса $I, J \in \bigwedge^m[n]$. Через $A_{I,J}$ обозначим множество

$$A_{I,J} := \{\xi \in R \mid t_{I,J}(\xi) \in H\} \subseteq R.$$

По определению диагональные множества $A_{I,I}$ равны всему кольцу R для любого индекса I. Далее мы докажем, что эти множества являются идеалами, то есть они образуют сеть идеалов. А последнее условие гарантирует, что мы получим D-сеть в терминологии Зенона Боревича [4]. Первым шагом к описанию уровня является следующее наблюдение.

Утверждение 8. *Если* $|I \cap J| = |K \cap L|$, *тогда множества* $A_{I,J}$ *и* $A_{K,L}$ *совпадают. Более того,* $A_{I,J}$ *— идеалы в* R.

Но сначала мы докажем более слабое утверждение.

Лемма 9. *Пусть* I, J, K, L *— различные элементы множества* $\bigwedge^m[n]$ *такие, что* $|I \cap J| = |K \cap L| = 0$. *Если* $n \geqslant 2m$, *тогда множества* $A_{I,J}$ *и* $A_{K,L}$ *совпадают.*

Доказательство леммы. Множества $A_{I,J}$ совпадают, когда $I \cup J$ фиксировано. Этот факт может быть доказан с помощью третьего типа коммутирований в Утверждении 7 с ζ и $-\zeta$. Если $\xi \in A_{I,J}$, то трансвекция $t_{I,J}(\xi) \in H$. Тогда следующие два произведения также принадлежат H:

$$[t_{I,J}(\xi), \textstyle\bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi)$$
$$[t_{I,J}(\xi), \textstyle\bigwedge^m t_{j,i}(-\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\mp\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\mp\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi).$$

Таким образом, произведение правых частей в полученных равенствах есть $t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm 2\zeta^2\xi) \in H$.

Легко доказать, что множество $I \cup J$ может быть изменено с помощью коммутирований второго типа. Например, множество $I_1 \cup J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ может быть заменено множеством $I_2 \cup J_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ следующим образом:

$$[t_{123,456}(\xi), \textstyle\bigwedge^3 t_{6,7}(\zeta)] = t_{123,457}(\xi\zeta).$$

$\square$

Доказательство Утверждения 8. Рассуждая как выше, мы видим, что множества $A_{I,J}$ и $A_{K,L}$ совпадают в случае $I \cap J = K \cap L$, где $n_1 = n - |I \cap J| \geqslant 2 \cdot m - 2 \cdot |I \cap J| = 2 \cdot m_1$.

В общем случае мы можем доказать утверждение с помощью коммутирований второго и третьего типов. Приведем пример этого расчета с заменой набора $I \cap J = \{1, 2\}$ на набор $\{1, 5\}$.

Пусть $t_{123,124}(\xi) \in H$. Таким образом, $[t_{123,124}(\xi), \bigwedge^3 t_{2,5}(\zeta)] = t_{123,145}(-\xi\zeta) \in H$. Прокоммутируем эту трансвекцию с элементом $\bigwedge^3 t_{5,2}(\zeta_1)$. Тогда и $t_{135,124}(-\zeta_1^2\xi\zeta)$ принадлежит H, и произведение $t_{123,124}(\xi\zeta\zeta_1) \cdot t_{135,145}(-\zeta_1\xi\zeta) \in H$. Из последнего включения мы видим, что $t_{135,145}(-\zeta_1\xi\zeta) \in H$ и $I \cap J = \{1, 5\}$.

Чтобы доказать, что все $A_{I,J}$ это идеалы в R, достаточно прокоммутировать элементарную трансвекцию с внешней трансвекцией с ζ и 1:

$$t_{I,J}(\xi\zeta) = [t_{I,J}(\xi), \Lambda^m t_{j,i}(\zeta), \Lambda^m t_{i,j}(\pm 1)] \in H.$$

□

Пусть $t_{I,J}(\xi)$ — элементарная трансвекция. Мы определим *расстояние* между индексами I и J как мощность пересечения $I \cap J$:

$$d(I, J) = |I \cap J|.$$

Эта комбинаторная характеристика играет такую же роль, как функция расстояния $d(\lambda, \mu)$ для корней λ и μ на весовой диаграмме систем корней.

С помощью введенного понятия Утверждение 8 можно перефразировать следующим образом. Множества $A_{I,J}$ и $A_{K,L}$ совпадают для одних и тех же расстояний: $A_{I,J} = A_{K,L} = A_{|I\cap J|}$. Предположим, что $d(I, J)$ больше чем $d(K, L)$, тогда, используя Утверждение 7, верно включение $A_{I,J} \leqslant A_{K,L}$.

Суммируя вышеприведенные аргументы, мы получаем градацию идеалов:

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_{m-2} \geqslant A_{m-1}.$$

Утверждение 10. *Идеалы* A_k *совпадают для* $n \geqslant 3m$*. Точнее, обратное включение* $A_k \leqslant A_{k+1}$ *верно при* $n \geqslant 3m - 2k$.

Доказательство. Это утверждение может быть доказано с помощью двойного коммутирования третьего типа следующим образом. Пусть $\xi \in A_k$, то есть трансвекция $t_{I,J}(\xi) \in H$ для $d(I, J) = k$. По третьему типу коммутирования с трансвекцией $\Lambda^m t_{j,i}(\zeta)$, мы получаем, что $t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \in H$. Рассмотрим аналогичный коммутатор со специально подобранной трансвекцией $t_{I_1,J_1}(\xi) \in H$ и $\Lambda^m t_{j_1,i_1}(\zeta_1)$ и получим, что другое произведение $t_{\tilde{I}_1,J_1}(\pm\zeta_1\xi) \cdot t_{I_1,\tilde{J}_1}(\pm\zeta_1\xi) \in H$. Финальный шаг состоит в коммутировании последних произведений.

Выбор трансвекций осуществляется таким образом, чтобы конечный коммутатор (первоначального вида $[ab, cd]$) был равен элементарной трансвекции. Этот выбор возможен благодаря условию $n \geqslant 3m - 2k$.

Приведем конкретный пример таких расчетов для случая $m = 4$. Эти вычисления могут быть легко обобщены. Первые три шага ниже соответствуют включениям $A_0 \leqslant A_1$, $A_1 \leqslant A_2$ и $A_2 \leqslant A_3$ соответственно. Мы подчеркиваем, что идеи доказательства всех трех шагов **полностью** идентичны. Разница заключается только в выборе соответствующих индексов. Мы заменяем числа 10, 11, 12 буквами α, β, γ.

(1) Пусть $\xi \in A_0$. Рассмотрим кратный коммутатор

$$\Big[[t_{1234,5678}(\xi), \Lambda^4 t_{8,4}(\zeta)], [t_{49\alpha\beta,123\gamma}(\xi), \Lambda^4 t_{\gamma,4}(\zeta_1)]\Big] \in H.$$

Он равен коммутатору

$$[t_{1234,4567}(-\xi\zeta) \cdot t_{1238,5678}(-\zeta\xi), t_{49\alpha\beta,1234}(\xi\zeta_1) \cdot t_{9\alpha\beta\gamma,123\gamma}(\zeta_1\xi)] \in H,$$

который является трансвекцией $t_{49\alpha\beta,4567}(\xi^2\zeta_1\zeta) \in H$. В результате, $A_0 \leqslant A_1$.

(2) Для $\xi \in A_1$ рассмотрим аналогичный коммутатор

$$\Big[[t_{1234,1567}(\xi), \Lambda^4 t_{7,4}(\zeta)], [t_{1489,123\alpha}(\xi), \Lambda^4 t_{\alpha,4}(\zeta_1)]\Big] \in H.$$

Таким образом,

$$[t_{1234,1456}(\xi\zeta) \cdot t_{1237,1567}(-\zeta\xi), t_{1489,1234}(\xi\zeta_1) \cdot t_{189\alpha,123\alpha}(-\zeta_1\xi)] \in H.$$

Снова этот коммутатор равен $t_{1489,1456}(-\xi^2\zeta_1\zeta) \in H$, то есть $A_1 \leqslant A_2$.

(3) Наконец, пусть $\xi \in A_2$. Рассмотрим коммутатор

$$\Big[[t_{1234,1256}(\xi), \Lambda^4 t_{6,4}(\zeta)], [t_{1248,1237}(\xi), \Lambda^4 t_{7,4}(\zeta_1)]\Big] \in H.$$

Он равен коммутатору

$$[t_{1234,1245}(-\xi\zeta) \cdot t_{1236,1256}(-\zeta\xi), t_{1248,1234}(\xi\zeta_1) \cdot t_{1278,1237}(-\zeta_1\xi)] \in H,$$

который является элементарной трансвекцией $t_{1248,1245}(\xi^2\zeta_1\zeta) \in H$. Таким образом $A_2 \leqslant A_3$.

$\square$

Мы доказали, что все идеалы A_i совпадают при достаточно большом n. Однако, следующее утверждение показывает соотношения между идеалами без этого ограничения. Напомним, что вычет res любой внешней трансвекции при фиксированных (n, m) равен биномиальному коэффициенту $\binom{n-2}{m-1}$.

Утверждение 11. *Для набора идеалов $\{A_0, \ldots, A_{m-1}\}$ выполнены следующие соотношения:*

$$A_k \leqslant A_{k+1}, \ \textit{при } n \geqslant 3m - 2k;$$
$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_{m-2} \geqslant A_{m-1};$$
$$\mathrm{res} \cdot A_{m-2} \leqslant A_{m-1}.$$

Доказательство. Первые две серии соотношений уже доказаны, поэтому нам необходимо только проверить, что $\mathrm{res}\cdot A_{m-2} \leqslant A_{m-1}$. Для этого снова воспользуемся третьим типом коммутирования в терминах Утверждения 7.

Пусть $\xi \in A_{m-2}$, то есть для любых индексов I, J с расстоянием $m-2$ трансвекция $t_{I,J}(\xi) \in H$. Заметим, что если $i \in I, j \in J$, тогда в коммутаторе

$$[t_{I,J}(\xi), \wedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi)$$

трансвекция $t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi)$ принадлежит группе H. Действительно, расстояние между $\tilde{I} = I\backslash i \cup j$ и $\tilde{J} = J\backslash j \cup i$ совпадает с $d(I, J)$, при этом $d(\tilde{I}, J) = d(I, \tilde{J}) = m-1$. Таким образом произведение $t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \in H$ для всех индексов I, J с $d(I, J) = m-2$ и всех различных $i \in I, j \in J$.

Рассмотрим $\wedge^m t_{1,2}(\xi\zeta) \in H$, где $\zeta \in R$. По определению внешней трансвекции (1): $\wedge^m t_{1,2}(\xi\zeta) = \prod\limits_L t_{L\cup 1, L\cup 2}(\xi\zeta)$. Доказательство состоит в том, чтобы последовательно сокращать количество множителей в произведении, умножая $\wedge^m t_{1,2}(\xi\zeta)$ на подходящие трансвекции $t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \in H$. В итоге останется элементарная трансвекция $t_{P\cup 1, P\cup 2}(c\xi\zeta)$ с расстоянием между индексами $m-1$ и коэффициентом c, равным $\binom{n-2}{m-1}$.

Приведем пример такого рассуждения для внешнего куба элементарной группы размерности 5. Пусть $\xi \in A_1, \zeta \in R$, $\wedge^3 t_{1,2}(\xi\zeta) = t_{134,234}(\xi\zeta) t_{135,235}(\xi\zeta) t_{145,245}(\xi\zeta)$.
Первым шагом рассмотрим коммутатор $[t_{134,245}(\xi), \wedge^3 t_{5,3}(\zeta)] \in H$. Как мы указали выше, тогда матрица $z_1 := t_{134,234}(-\xi\zeta) t_{145,245}(\xi\zeta) \in H$. Таким образом,

$$\wedge^3 t_{1,2}(\xi\zeta) \cdot z_1 = t_{135,235}(\xi\zeta) t_{145,245}(2\xi\zeta) \in H.$$

Чтобы получить элементарную трансвекцию, рассмотрим другой коммутатор $[t_{135,245}(\xi), \wedge^3 t_{4,3}(-\zeta)] \in H$. Тогда матрица $z_2 := t_{145,245}(\xi\zeta) t_{135,235}(-\xi\zeta) \in H$. Умножив $\wedge^3 t_{1,2}(\xi\zeta)$ на $z_1 z_2$, получим трансвекцию $t_{145,245}(3\xi\zeta) \in H$. Значит $3\xi\zeta \in A_2$. $\square$

Лемма 12. *Для любого идеала* $A \trianglelefteq R$ *верно равенство*

$$E_N(A)^{\wedge^m E_n(R)} = E_N(R, A),$$

где по определению $E_N(R, A) = E_N(A)^{E_N(R)}$.

Доказательство. Очевидно, что левая часть содержится в правой. Доказательство обратного включения выполняется индукцией по $d(I, J)$. По лемме Васерштейна–Суслина [21] достаточно проверить, что матрица $z_{I,J}(\xi, \zeta)$ принадлежит $F := E_N(A)^{\wedge^m E_n(R)}$ для любых $\xi \in A$, $\zeta \in R$.

База индукции $|I \cap J| = m-1$. Тогда включение очевидно:

$$z_{I,J}(\xi, \zeta) \cdot t_{I,J}(-\xi) = [t_{J,I}(\zeta), t_{I,J}(\xi)] = [\wedge^m t_{j_1,i_1}(\zeta), t_{I,J}(\xi)] \in F.$$

Теперь рассмотрим общий случай $|I \cap J| = p$, то есть $I = k_1 \ldots k_p i_1 \ldots i_q$ и

$J = k_1 \dots k_p j_1 \dots j_q$. Для следующих вычислений нам понадобятся еще два множества $V := k_1 \dots k_p i_1 \dots i_{q-1} j_q$ и $W := k_1 \dots k_p j_1 \dots j_{q-1} i_q$.
Во-первых, мы представим $t_{I,J}(\xi)$ как коммутатор элементарных трансвекций,

$$z_{I,J}(\xi, \zeta) = {}^{t_{J,I}(\zeta)}\, t_{I,J}(\xi) = {}^{t_{J,I}(\zeta)}\, [t_{I,V}(\xi), t_{V,J}(1)].$$

Сопрягая аргументы коммутатора с помощью $t_{J,I}(\zeta)$, получим

$$[t_{J,V}(\zeta\xi) t_{I,V}(\xi), t_{V,I}(-\zeta) t_{V,J}(1)] =: [ab, cd].$$

Далее, мы разложим правую часть при помощи формулы

$$[ab, cd] = {}^{a}[b, c] \cdot {}^{ac}[b, d] \cdot [a, c] \cdot {}^{c}[a, d],$$

и заметим, что показатель a можно опустить, так как он принадлежит $E_N(A)$. Теперь непосредственные вычисления, основанные на коммутационной формуле Шевалле, показывают, что

$$\begin{aligned}
[b, c] &= [t_{I,V}(\xi), t_{V,I}(-\zeta)] \in F \text{ (по инд. пред. для расстояния } m-1\text{)};\\
{}^{c}[b, d] &= {}^{t_{V,I}(-\zeta)}\, [t_{I,V}(\xi), t_{V,J}(1)] = t_{V,W}(\xi\zeta^2) t_{I,W}(-\xi\zeta) \cdot {}^{\bigwedge^m t_{j_q,i_q}(-\zeta)} t_{I,J}(\xi);\\
[a, c] &= [t_{J,V}(\zeta\xi), t_{V,I}(-\zeta)] = t_{J,I}(-\zeta^2\xi);\\
{}^{c}[a, d] &= {}^{t_{V,I}(-\zeta)}\, [t_{J,V}(\zeta\xi), t_{V,J}(1)] =\\
= t_{J,W}(-\xi\zeta^2(1+\xi\zeta)) t_{V,W}(-\xi\zeta^2) &\cdot {}^{\bigwedge^m t_{j_q,i_q}(-\zeta)} t_{J,V}(\xi\zeta) \cdot {}^{\bigwedge^m t_{j_q,i_q}(-\zeta)} z_{J,V}(-\zeta\xi, 1) \in F,\\
&\qquad \text{(по инд. пред. для расстояния } p+1\text{)}
\end{aligned}$$

где все произведения в правых частях принадлежат F. $\square$

Следствие 13. *Пусть A — произвольный идеал кольца R, тогда*

$$\textstyle\bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, A) = \bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(A).$$

Пусть $n \geqslant 3m$, тогда идеал $A = A_{I,J}$ называется *уровнем* надгруппы H. В случае $n < 3m$ уровень определяется набором идеалов. Назовем набор $(A_0, \dots, A_{m-1})$ *допустимым*, если его идеалы удовлетворяют соотношениям из Утверждения 11. Тогда *уровнем* надгруппы H для $n < 3m$ является допустимый набор $\mathbb{A} = (A_0, \dots, A_{m-1})$. Суммируя Утверждение 10 и Лемму 12, мы получаем следующий важный результат.

Теорема 14 (Вычисление уровня). *Пусть $n \geqslant 3m$, H — подгруппа в $GL_N(R)$, содержащая $\bigwedge^m E_n(R)$. Тогда существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что*

$$\textstyle\bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, A) \leqslant H.$$

А именно, если $t_{I,J}(\xi) \in H$ *для некоторых* I *и* J*, тогда* $\xi \in A$*.*

В общем случае каждому допустимому набору $\mathbb{A}$ соответствует группа $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,\mathbb{A}) := \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,\mathbb{A})$. Она определяется как подгруппа, порожденная $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ и всеми элементарными трансвекциями $t_{I,J}(\xi)$, где $\xi \in A_{I,J}$:

$$\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,\mathbb{A}) = \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \langle t_{I,J}(\xi),\ \xi \in A_{I,J}\rangle.$$

Теорема 14$'$. *Пусть* $n \geqslant 4$*,* H *— подгруппа в* $\mathrm{GL}_N(R)$*, содержащая* $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$*. Тогда существует сеть идеалов* $\mathbb{A}$ *такая, что*

$$\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,\mathbb{A}) \leqslant H.$$

А именно, если $t_{I,J}(\xi) \in H$ *для некоторых* I *и* J*, тогда* $\xi \in A_{I,J}$*.*

1.5. **Нормализатор $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$.** В этом параграфе мы опишем нормализатор группы, полученной при вычислении уровня, как нижнее ограничение для H.

Лемма 15. *Пусть* $n \geqslant 3m$*. Группа* $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A) := \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,A)$ *совершенна для любого идеала* $A \trianglelefteq R$*.*

Доказательство. Достаточно проверить, что все образующие группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,A)$ принадлежат коммутанту, который мы обозначим за F. Доказательство состоит из двух шагов.

- Для внешней трансвекции $\bigwedge^m t_{i,j}(\zeta)$ утверждение следует из гомоморфизма Бине–Коши:
$$\bigwedge^m t_{i,j}(\zeta) = \bigwedge^m\Big([t_{i,h}(\zeta), t_{h,j}(1)]\Big) = [\bigwedge^m t_{i,h}(\zeta), \bigwedge^m t_{h,j}(1)]\,.$$
- Для элементарной трансвекции $t_{I,J}(\xi)$ утверждение может быть получено следующим образом. Предположим, что $I\cap J = K = k_1\dots k_p$, где $0 \leqslant p \leqslant m-1$, то есть $I = k_1\dots k_p i_1\dots i_q$ и $J = k_1\dots k_p j_1\dots j_q$. Так же как в Лемме 12 определим множество $V = k_1\dots k_p j_1\dots j_{q-1} i_q$. И тогда
$$t_{I,J}(\xi) = [t_{I,V}(\xi), t_{V,J}(1)] = \Big[t_{I,V}(\xi), \bigwedge^m t_{i_q,j_q}(\pm 1)\Big]\,.$$

$\square$

Для идеала A кольца R пусть R/A обозначает фактор-кольцо. Обозначим через $\rho_A\colon R \longrightarrow R/A$ каноническую проекцию, действующую по следующему правилу. Для любого элемента $\lambda \in R$: $\rho(\lambda) = \bar\lambda := \lambda + A \in R/A$. Применяя проекцию ко всем элементам матрицы, мы получаем гомоморфизм редукции:

$$\begin{array}{rccc}\rho_A\colon & \mathrm{GL}_n(R) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(R/A)\\ & a & \mapsto & \overline{a} = (\overline{a}_{I,J})\end{array}$$

Ядро гомоморфизма ρ_A обозначается $\mathrm{GL}_n(R, A)$ и называется *главной* (*относительной*) *конгруэнц-подгруппой уровня* A. Пусть $C_n(R)$ — центр группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящий из скалярных матриц $\lambda e, \lambda \in R^*$. Обозначим полный прообраз центра $\mathrm{GL}_n(R/A)$ под действием гомоморфизма ρ_A через $C_n(R, A)$. Такая группа называется *полной* (*относительной*) *конгруэнц-подгруппой уровня* A. Заметим, что группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A) \leqslant C \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$, $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ и $C \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ являются нормальными в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Далее мы сосредоточимся на изучении полного прообраза группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)$:

$$C \textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A) = \rho_A^{-1}\Big(\textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)\Big).$$

Ключевым моментом в редукции по модулю идеала является следующая стандартная коммутационная формула, доказанная Леонидом Васерштейном [94], Зеноном Боревичем и Николаем Вавиловым [5].

$$[E_n(R), C_n(R, A)] = E_n(R, A) \text{ для коммутативного кольца } R \text{ и } n \geqslant 3.$$

Наконец, мы готовы сформулировать *редукцию по модулю уровня.*

Теорема 16. *Пусть* $n \geqslant 3m$. *Для любого идеала* $A \trianglelefteq R$, *верно*

$$N_{\mathrm{GL}_N(R)}\Big(E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)\Big) = C \textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A).$$

Доказательство. В доказательстве через N обозначается нормализатор $N_{\mathrm{GL}_N(R)}$.

Так как $E_N(R, A)$ и $\mathrm{GL}_N(R, A)$ нормальные подгруппы в $\mathrm{GL}_N(R)$, то

$$N(\underbrace{E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)}_{=\bigwedge^m E_n(R)\, E_N(R, A)}) \leqslant N\left(E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)\, \mathrm{GL}_N(R, A)\right) = C \textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A). \tag{3}$$

Заметим, что последнее равенство обусловлено функториальностью нормализатора:

$$N\left(E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)\, \mathrm{GL}_N(R, A)\right) = N\left(\rho_A^{-1}\left(\textstyle\bigwedge^m E_n(R/A)\right)\right) =$$
$$\rho_A^{-1}\left(N\left(\textstyle\bigwedge^m E_n(R/A)\right)\right) = \rho_A^{-1}\left(\textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)\right).$$

В частности, используя (3), получим

$$[C \textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)] \leqslant E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)\, \mathrm{GL}_N(R, A). \tag{4}$$

С другой стороны абсолютно очевидно, что $E \bigwedge^m E_n(R, A)$ нормальна в правой части. Действительно, легко доказать следующее более сильное включение:

$$[\textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)\, \mathrm{GL}_N(R, A), E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A)] \leqslant E \textstyle\bigwedge^m E_n(R, A). \tag{5}$$

Чтобы проверить это, рассмотрим коммутатор вида

$$[xy, hg], \qquad x \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R), y \in \mathrm{GL}_N(R, A), h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), g \in \mathrm{E}_N(R, A).$$

Тогда $[xy, hg] = {}^x[y, h] \cdot [x, h] \cdot {}^h[xy, g]$. Нам необходимо доказать, что все множители в правой части принадлежат $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$. Второй множитель лежит в $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$. Для первого коммутатора мы должны рассмотреть следующие включения:

$$^{\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)}[\mathrm{GL}_N(R, A), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] \leqslant \Big[\underbrace{^{\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)}\mathrm{GL}_N(R, A)}_{=\mathrm{GL}_N(R,A)}, \underbrace{^{\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)}_{=\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)}\Big] \leqslant \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A).$$

Элемент $h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$, таким образом мы можем его опустить в сопряжении. Третий коммутатор лежит в $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ по следующему включению.

$$[\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)\, \mathrm{GL}_N(R, A), \mathrm{E}_N(R, A)] \leqslant [\mathrm{GL}_N(R), \mathrm{E}_N(R, A)] = \mathrm{E}_N(R, A).$$

Теперь, с использованием (4) и (5), получим

$$[\mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A), \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)] \leqslant \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A). \tag{6}$$

Чтобы применить тождество Холла–Витта, нам необходима несколько более точная версия последнего включения:

$$[[\mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)], [\mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)]] \leqslant \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A). \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что по формуле (4) мы уже проверили, что левая часть порождается коммутаторами вида

$$[uv, [z, y]], \text{ где } u, y \in \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A), v \in \mathrm{GL}_N(R, A), z \in \mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A).$$

Однако,

$$[uv, [z, y]] = {}^u[v, [z, y]] \cdot [u, [z, y]],$$

По формуле (6) второй коммутатор принадлежит $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$, в то время как по (7) первый коммутатор это элемент $[\mathrm{GL}_N(R, A), \mathrm{E}_N(R)] \leqslant \mathrm{E}_N(R, A)$.

Теперь мы готовы закончить доказательство. Согласно предыдущей лемме, группа $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ совершенна, таким образом достаточно показать, что $[z, [x, y]] \in \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ для всех $x, y \in \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A), z \in \mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$. Действительно, тождество Холла–Витта утверждает

$$[z, [x, y]] = {}^{xz}[[z^{-1}, x^{-1}], y] \cdot {}^{xy}[[y^{-1}, z], x^{-1}],$$

где второй коммутатор принадлежит $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ по формуле (6). Опуская сопряжение при помощи $x \in \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ в первом коммутаторе и перенося сопряжение при помощи z внутрь коммутатора, мы видим, что осталось только доказать принадлежность $[[x^{-1}, z], [z, y]y] \in \mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$. Действительно,

$$[[x^{-1}, z], [z, y]y] = [[x^{-1}, z], [z, y]] \cdot {}^{[z,y]}[[x^{-1}, z], y],$$

где оба коммутатора в правой части принадлежат $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ по формулам (6) и (7), и более того, сопрягающий элемент $[z, y]$ в правом коммутаторе это элемент группы $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A) \, \mathrm{GL}_N(R, A)$, и таким образом, по формуле (5), нормализует $\mathrm{E} \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$. $\square$

2. Нормализатор внешних степеней

Следуя стандартной схеме описания надгрупп, требуется вычислить нормализатор $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. В этой главе мы покажем, что он равен $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. В [16] авторы доказали, что $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ совпадает со стабилизатором идеала Плюккера. Однако, этого недостаточно для нашей цели. Нам необходимо использовать другие инварианты для группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, например, инвариантные формы. Для классических и исключительных групп в естественных представлениях над произвольным кольцом эти формы хорошо известны, см., например, работы [14; 15; 17—19]. Кроме того, недавно был разработан унифицированный более общий подход, см. замечательную работу Скипа Гарибальди и Роберта Гуральника [54]. Мы также отсылаем читателя к работе [40], особенно к разделу 4.4, где автор построил кубические инвариантные формы для групповой схемы $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n$.

2.1. **Стабилизатор идеала Плюккера.** Сначала мы напоминаем все основные результаты работы [16], так как они понадобятся нам для вычисления нормализатора. Многочлены Плюккера представляют собой однородные квадратичные полиномы $f_{I,J} \in R[x_H]_{H \in \bigwedge^m [n]}$ Грассмановых координат x_H. В общем случае многочлены Плюккера можно представить в следующем виде

$$f_{I,J} = \sum_{j \in J \setminus I} \pm x_{I \cup \{j\}} x_{J \setminus \{j\}},$$

где $I \in \bigwedge^{m-1}[n]$ и $J \in \bigwedge^{m+1}[n]$. Чтобы уточнить знак слагаемых, расширим определение Грассмановых координат следующим способом. Если среди набора $i_1, \ldots, i_m$ есть одинаковые числа, то $x_{i_1 \ldots i_m} = 0$, иначе $x_{i_1 \ldots i_m} = \mathrm{sgn}(i_1, \ldots, i_m) x_{\{i_1 \ldots i_m\}}$. Таким образом, многочлен Плюккера есть

$$f_{I,J} = \sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h x_{i_1 \ldots i_{m-1} j_h} x_{j_1 \ldots \hat{j_h} \ldots j_{m+1}}.$$

Идеал Плюккера $\mathrm{Plu} := \mathrm{Plu}_{n,m} \trianglelefteq R\left[x_I \,:\, I \in \bigwedge^m[n]\right]$ по определению порождён всеми соотношениями Плюккера $f_{I,J} = 0$.

В дальнейшем для иллюстрации внутренней комбинаторики уравнений мы будем использовать весовые диаграммы. Мы отсылаем читателя к работе [83], где описаны все детали построения весовых диаграмм. Внешняя степень элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ соответствует представлению со старшим весом ϖ_m группы Шевалле типа $\Phi = A_{n-1}$. Весовая диаграмма в этом случае строится в соответствии с “треугольником Паскаля”. В работе мы будем использовать два базовых примера $\bigwedge^2 \mathrm{E}_5(R)$ и $\bigwedge^3 \mathrm{E}_7(R)$. Весовая диаграмма первой группы представляет собой половину квадрата на 4 вершинах, см. рисунок 1. Для группы $\bigwedge^3 \mathrm{E}_7(R)$ весовая диаграмма выглядит сложнее, мы её изобразили на рисунке 2.

Как мы покажем ниже, группа $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ будет являться аналогом стандартной группы Шевалле $G(\Phi, R)$, а то время как $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ будет соответствовать расширенной группе

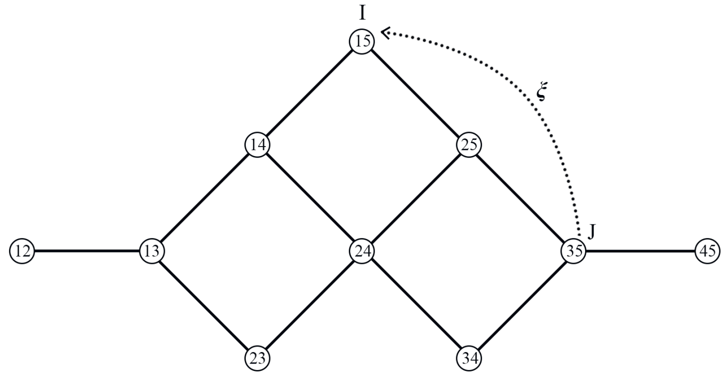

Рис. 1: Весовая диаграмма (A_4, ϖ_2) и действие $t_{I,J}(\xi)$

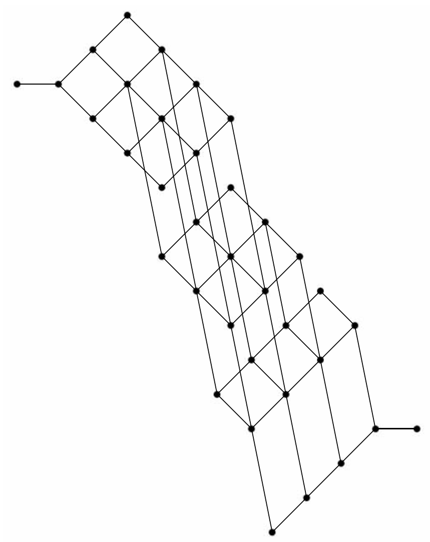

Рис. 2: Весовая диаграмма (A_6, ϖ_3)

Шевалле $\overline{G}(\Phi, R)$. (Абсолютную) элементарную подгруппу группы Шевалле $G(\Phi, R)$ играет роль $\bigwedge^m E_n(R)$. В большинстве конструкций $\bigwedge^m GL_n(R)$ возникает вместе с действием на модуле Вейля $V(\varpi_m) = R^N$. Пусть $\Lambda(\varpi_m)$ — набор весов модуля $V(\varpi_m)$. Для m-ого фундаментального представления все кратности весов равны 1, так как наше представление микровесовое. Как мы упоминали выше, $\Lambda(\varpi_m) = \bigwedge^m[n]$, то есть индексы $\lambda = I \in \bigwedge^m[n]$ являются весами представления. Зафиксируем некоторый допустимые базис $v^\lambda, \lambda \in \Lambda$ модуля $V = V(\varpi_m)$. Мы представляем себе вектор $a \in V$, где $a = \sum v^\lambda a_\lambda$, как столбец координат $a = (a_\lambda), \lambda \in \Lambda$.

На рисунке 1 мы изобразили весовую диаграмму (A_4, ϖ_2) вместе с используемой нумерацией весов, когда все веса упорядочены по возрастанию в лексикографическом порядке. При этом старший вес располагается слева. Напомним, что в весовой диаграмме два веса соединены ребром, если их разность является простым корнем α системы A_{n-1}.

Лемма 17. *Пусть* R — *произвольное коммутативное кольцо. Группа* $\bigwedge^m E_n(R)$ *со-*

храняет идеал Плюккера Plu.

Далее, следуя обозначениям указанной работы, положим $G_{nm}(R) := \mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu})$ для любого коммутативного кольца R, где $\mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu})$ это группа линейных преобразований, сохраняющих идеал Plu:

$$\mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu}) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid f(gx) \in \mathrm{Plu} \ \text{ for all } f \in \mathrm{Plu}\}.$$

Лемма 18. *Для любых n, m функтор $R \mapsto \mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu})$ является определенной над $\mathbb{Z}$ аффинной групповой схемой.*

Следующие результаты классически известны, см. [43], а также [100, Теорема 4]. Более того, для внешних степеней полной линейной группы они явно упоминаются в работе [16]. Отметим, что в нашем случае представление $\bigwedge^m$ микровесовое. Из этого сразу следует, что оно неприводимо и тензорно неразложимо.

Лемма 19. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Для любых n, m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, ядро представления $\bigwedge^m$ группы $\mathrm{GL}_n(K)$ (соответственно $\mathrm{SL}_n(K)$) равно μ_m (соответственно μ_d), где $d = \text{НОД}(n, m)$.*

Лемма 20. *Рассматриваемая как подгруппа в $\mathrm{GL}_N(K)$ алгебраическая группа $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(K)\big)$ неприводима и тензорно неразложима. Боле того, за исключением случая $n = 2m \geqslant 4$ группа $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(K)\big)$ совпадает со своим нормализатором. В исключительном случае половинной размерности эта группа имеет индекс 2 в своем нормализаторе. Аналогичное утверждение верно и для алгебраической группы $\bigwedge^m\big(\mathrm{SL}_n(K)\big)$ как подгруппы $\mathrm{SL}_N(K)$.*

Пользуясь классификацией Гари Зайтца максимальных подгрупп в классических группах [87, Таблица 1] (см. также обзор [42] с исправлениями таблицы), можно легко доказать, что $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$ максимальна для алгебраически замкнутого поля K. Следующее утверждение это Лемма 7 работы [16].

Лемма 21. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Для любых $n, m, 1 \leqslant m \leqslant n-1$ группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ и $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$ максимальны среди связных замкнутых подгрупп в одной из следующих групп:*

$\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$:
- *в $\mathrm{GL}_N(K)$, если $n \neq 2m$;*
- *в $\mathrm{GSp}_N(K)$, если $n = 2m$ и m нечетно;*
- *в $\mathrm{GO}^0_N(K)$, если $n = 2m$ и m четно.*

$\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$:
- *в $\mathrm{SL}_N(K)$, если $n \neq 2m$;*
- *в $\mathrm{Sp}_N(K)$, если $n = 2m$ и m нечетно;*
- *в $\mathrm{SO}_N(K)$, если $n = 2m$ и m четно.*

Более того, в исключительном случае указанные классические группы являются единственными собственными связными надгруппами $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ и $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$.

Следствие 22. *Пусть* K *— алгебраически замкнутое поле, тогда* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) = G^0_{nm}(K)$

Наконец, для совпадения групповых схем, требуется доказать, что G_{nm} гладкая, то есть фактически необходимо вычислить размерность соответствующей алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_{nm})$.

Лемма 23. *Для произвольного поля* K *размерность алгебра Ли* $\mathrm{Lie}(G_{nm,K})$ *не превосходит* n^2.

Пользуясь теоремой 1.6.1 работы [99], мы получаем следующий результат.

Теорема 24. *Для любых* $n, m, 1 \leqslant m \leqslant n-1$ *имеет место изоморфизм аффинных групповых схем над* $\mathbb{Z}$:

$$G_{nm} \cong \begin{cases} \mathrm{GL}_n / \mu_m, & \text{если } n \neq 2m, \\ \mathrm{GL}_n / \mu_m \leftthreetimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

2.2. **Внешние степени как стабилизатор инвариантных форм I.** В этом разделе мы предполагаем, что $n \geqslant 2m$, так как для произвольного свободного R-модуля V существует изоморфизм $\bigwedge^m V^* \cong (\bigwedge^{\dim(V)-m} V)^*$. Нашей целью является представление группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ в качестве стабилизатора для некоторого набора (симметричных или кососимметричных) многочленов. Следующая классическая теорема может быть найдена в [47, Chapter 2, Sections 5–7].

Утверждение 25. *Для алгебраически замкнутого поля* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ *можно представить как группу подобий инвариантной формы только в случае* $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. *Причем эта форма единственна и равна*

- $q^m_{[n]}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \dots, I_{\frac{n}{m}})\, x_{I_1} \dots x_{I_{\frac{n}{m}}}$ *для четных* m;
- $q^m_{[n]}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \dots, I_{\frac{n}{m}})\, x_{I_1} \wedge \dots \wedge x_{I_{\frac{n}{m}}}$ *для нечетных* m,

где суммы в обоих случаях берутся по всем неупорядоченным разбиениям множества $[n]$ *в* m*-элементные подмножества* $I_1, \dots, I_{\frac{n}{m}}$.

Таким образом, $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ изоморфна группе матриц $g \in \mathrm{GL}_N(K)$ для которых существует мультипликатор $\lambda \in R^*$ такой, что $q^m_{[n]}(gx) = \lambda(g) q^m_{[n]}(x)$ для всех $x \in K^N$, где K — алгебраически замкнутое поле. При этом $\lambda(g)$ является одномерным представлением группы $\mathrm{GL}_n(K)$, следовательно $\lambda = \det^{\otimes l}\colon g \mapsto \det^l(g)$. Чтобы вычислить степень определителя достаточно подставить диагональную матрицу $d_i(\xi) \in \mathrm{GL}_n(K)$. Очевидно, что тогда $q^m_{[n]}(\bigwedge^m d_i(\xi) \cdot x) = \xi q^m_{[n]}(x)$. Таким образом, $\lambda(g) = \det(g)$.

В работе мы будем использовать унифицированное обозначение $q(x)$ для этих форм. Это не приведет к путанице, так как мы всегда сможем различить формы по степени m. Прежде чем мы перейдем к изучению стабилизатора указанных форм над произвольным кольцом, заметим, что представленные формы единственно возможные для группы

$\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Далее, коэффициенты этих форм ± 1, таким образом они определены над $\mathbb{Z}$. Тогда после непосредственного вычисления, получим

$$q(\bigwedge^m g \cdot x) = \det(g) \cdot q(x) \text{ для любого } g \in \mathrm{GL}_n(R).$$

Таким образом, мы можем предполагать, что эти формы инвариантны под действием $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, где R — коммутативное кольцо.

Предположим, что m четно для краткости записи всех вычислений и обозначений. Однако, если доказательства будут отличаться для разной четности m, мы будем делать соответствующие пометки. Кроме этого, в работе нам будет удобно использоваться не только саму форму $q(x)$, но и ее (*полную*) *поляризацию*. Пусть $k := \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, зададим k-линейную форму:

$$f^m_{[n]}(x^1, \ldots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \ldots, I_k)\, x^1_{I_1} \ldots x^k_{I_k},$$

где сумма берется по всем *упорядоченным* разбиениям множества $[n]$ в m-элементные подмножества. Для нечетного m, $f^m_{[n]}(x^1, \ldots, x^k)$ задается аналогично. Как и для формы $q(x)$ обозначим поляризации унифицированно через $f(x^1, \ldots, x^k)$. Обратим внимание, что в отличии от $q(x)$, сумма в поляризации берется по упорядоченным разбиениям.

Утверждение 26. *Пусть R — произвольное коммутативное кольцо. Если $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, тогда форма f инварианта под действием элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Более того, под действием весового элемента $\bigwedge^m d_i(\xi)$ форма f умножается на ξ.*

Доказательство. Заметим, что это утверждение легко следует из того, что мультипликатор $\lambda(g)$ равен определителю, однако мы строго это не доказали для произвольных колец.

Сначала покажем, что $f(gx^1, \ldots, gx^k) = \xi f(x^1, \ldots, x^k)$, где $g = \bigwedge^m d_i(\xi)$. Для этого заметим, что так как набор $I_1, \ldots, I_k$ является разбиением $[n]$, то в каждом мономе $x^1_{I_1} \ldots x^k_{I_k}$ формы f число i входит в единственную переменную $x^l_{I_l}$. Таким образом, каждый моном формы $f(gx^1, \ldots, gx^k)$ будет иметь вид $\pm x^1_{I_1} \ldots x^{l-1}_{I_{l-1}} \xi x^l_{I_l} x^{l+1}_{I_{l+1}} \ldots x^k_{I_k}$.

Пусть теперь $g = \bigwedge^m t_{i,j}(\xi)$. Из (1) мы знаем, что g представляется в виде произведения трансвекций $t_{iL,jL}(\mathrm{sgn}(i,L)\,\mathrm{sgn}(j,L)\xi)$ для всех $L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]$. Таким образом, в векторе $gx, x \in R^N$ изменится ровно $\binom{n-2}{m-1}$ координат: $(gx)_{iL} = x_{iL} + \mathrm{sgn}(i,L)\,\mathrm{sgn}(j,L)\xi x_{jL}$. Тогда в форме $f(gx^1, \ldots, gx^k) - f(x^1, \ldots, x^k)$ все мономы будут иметь вид

$$\pm x^1_{I_1} \ldots x^{l-1}_{I_{l-1}} \Big(\mathrm{sgn}(i,L)\,\mathrm{sgn}(j,L)\xi x^l_{jL}\Big) x^{l+1}_{I_{l+1}} \ldots x^k_{I_k},$$

где $I_l = iL$, $L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]$. Пусть $I_1, \ldots, I_k$ является разбиением множества $[n]$, среди которого индексы с номерами l, p имеют вид $I_l = iL_1$, $I_p = jL_2$, где $L_1, L_2 \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]$. Тогда индексы $\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_k$, среди которых $\tilde{I}_l = jL_1$, $\tilde{I}_p = iL_2$, тоже является разбиением множества $[n]$, попадающем в форму $f(gx^1, \dots, gx^k) - f(x^1, \dots, x^k)$. Таким образом, сумма соответствующих мономов будет равна

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k) x^1_{I_1} \dots x^p_{jL_2} \dots x^{l-1}_{I_{l-1}} \left(\operatorname{sgn}(i, L_1) \operatorname{sgn}(j, L_1) \xi x^l_{jL_1}\right) x^{l+1}_{I_{l+1}} \dots x^k_{I_k} +$$
$$\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k) x^1_{\tilde{I}_1} \dots x^l_{jL_1} \dots x^{l-1}_{\tilde{I}_{l-1}} \left(\operatorname{sgn}(i, L_2) \operatorname{sgn}(j, L_2) \xi x^p_{jL_2}\right) x^{l+1}_{\tilde{I}_{l+1}} \dots x^k_{\tilde{I}_k}$$

Для завершения доказательства осталось показать, что соответствующие знаки противоположны:

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k) \operatorname{sgn}(i, L_1) \operatorname{sgn}(j, L_1) = -\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k) \operatorname{sgn}(i, L_2) \operatorname{sgn}(j, L_2).$$

Умножив это равенство на $\operatorname{sgn}(j, L_2) \operatorname{sgn}(j, L_1)$, получим

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k) \operatorname{sgn}(i, L_1) \operatorname{sgn}(j, L_2) = -\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k) \operatorname{sgn}(i, L_2) \operatorname{sgn}(j, L_1).$$

А это эквивалентно

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k) = -\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k),$$

где индексы $I_p, \tilde{I}_p$ и $I_l, \tilde{I}_l$ неупорядочены.

Если m четно, тогда это равенство эквивалентно $\operatorname{sgn}(iL_1, jL_2) = -\operatorname{sgn}(jL_1, iL_2)$. Так как iL_1, jL_2 отличается от jL_1, iL_2 на нечетное число транспозиций, то знаки противоположны. Аналогично, $I_1, \dots, I_k$ и $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k$ отличаются на нечетное число транспозиий для нечетного m. $\square$

Определим группу $G_f(R)$ как группу линейных преобразований, сохраняющих форму $f(x^1, \dots, x^k)$:

$$G_f(R) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid f(gx^1, \dots, gx^k) = f(x^1, \dots, x^k) \text{ для всех } x^1, \dots, x^k \in R^N\}.$$

Она является аналогом группы Шевалле для случая внешних степеней. Расширенной группой Шевалле будут соответствовать подобия формы $f(x^1, \dots, x^k)$:

$$\begin{aligned}\overline{G}_f(R) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid \; &\text{существует } \lambda \in R^* \text{ такая, что}\\ &f(gx^1, \dots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \dots, x^k) \text{ для всех } x^1, \dots, x^k \in R^N\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что функторы $R \mapsto \overline{G}_f(R)$ и $R \mapsto G_f(R)$ задают аффинную групповую схему над $\mathbb{Z}$. Тогда при $k = \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$ мы можем ожидать, что $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ совпадает с $\overline{G}_f(R)$, а $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ совпадает с $G_f(R)$. Это почти верно, и следующая теорема дает точный ответ.

Теорема 27. *Предположим, что $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ совпадает с $\overline{G}_f(R)$ за исключением случая половинной размерности. А именно, если $n = 2m$, тогда $\overline{G}_f(R) = \mathrm{GO}_N(R)$ или $\mathrm{GSp}_N(R)$ в зависимости от четности m. Таким образом, в этом слу-*

чае $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ *это подгруппа полной ортогональной или полной симплектической группы. Аналогичное утверждение верно и для* $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ *и* $G_f(R)$.

Замечание 28. В случае $(n, m) = (4, 2)$ стабилизатор формы равен $\mathrm{GO}_6(R)$. Кроме того он также совпадает с $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_4(R)$.

Как и для стабилизатора идеала Плюккера для доказательства воспользуемся леммой Уотерхауза[1], которая является Теоремой 1.6.1 работы [99]. Она позволяет свести проверку изоморфизма аффинных групповых схем к проверке изоморфизма их значений на алгебраически замкнутых полях и двойных числах над ними. Напомним, что алгебра $K[\delta]$ двойных чисел над полем изоморфна как K-модуль $K \oplus K\delta$, а умножение в ней задается посредством $\delta^2 = 0$.

Лемма 29. *Пусть* G *и* H *— аффинные групповые схемы конечного типа над* $\mathbb{Z}$, *причем* G *— плоская, а* $\phi\colon G \longrightarrow H$ *— морфизм групповых схем. Предположим, что для любого алгебраически замкнутого поля* K *выполняются следующие условия:*

(1) $\dim(G_K) \geqslant \dim_K(\mathrm{Lie}(H_K))$,

(2) ϕ *индуцирует мономорфизм на группах точек* $G(K) \longrightarrow H(K)$ *и* $G(K[\delta]) \longrightarrow H(K[\delta])$,

(3) *Нормализатор* $\phi(G^0(K))$ *в* $H(K)$ *содержится в* $\phi(G(K))$.

Тогда ϕ *является изоморфизмом групповых схем над* $\mathbb{Z}$.

Здесь через G^0 обозначается связная компонента единицы схемы G, G_K — схема, получающаяся из G заменой скаляров, а $\mathrm{Lie}(H_K)$ — алгебра Ли схемы H_K. Заметим, что в нашем случае условия на схемы выполнены автоматически. Все рассматриваемые схемы имеют конечный тип, являясь подсхемами в подходящей GL_n, а условие плоскости следует из того, что схема G будет связной, и после замены базы на алгебраически замкнутые поля получатся гладкие схемы одинаковой размерности. Более того, в предыдущем разделе мы уже показали, что нормализатор $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ в $\mathrm{GL}_N(K)$ совпадает с $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$. Таким образом, для установления изоморфизма требуется проверить только первые два условия леммы.

Утверждение 30. *Пусть* K *— алгебраически замкнутое поле и* $n \neq 2m$, *тогда*

$$\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) = \overline{G}_f^0(K) \quad \text{и} \quad \bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K) = G_f(K).$$

Доказательство. Утверждение 25 гарантирует, что $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ сохраняет инвариантную форму $f(x^1, \ldots, x^k)$, таким образом $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) \leqslant \overline{G}_f(K)$; А так как $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ связна, то $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) \leqslant \overline{G}_f^0(K)$. Далее, из Леммы 21 следует, что $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ максимальна среди связных замкнутых подгрупп в $\mathrm{GL}_N(K)$. А так как $\overline{G}_f(K)$ — собственная подгруппа в $\mathrm{GL}_N(K)$, то верно и обратное включение. Для группы $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$ доказательство аналогично. □

[1] Аналогично этот результат может быть доказан, используя SGA, Exp. VI_b, Cor. 2.6

Теперь вычислим размерность алгебр Ли $\overline{G}_f$ и G_f. Для этого напомним как определятся алгебра Ли схемы G_{nm}, сохраняющей идеал Плюккера Plu, см. §2.1. Мы следуем работе Уильяма Уотерхауза [99], где похожие вычисления проводятся в леммах 3.2, 5.3 и 6.3. Пусть K — произвольное поле. Тогда алгебру Ли $\mathrm{Lie}(G_K)$ аффинной групповой схемы G_K наиболее естественно интерпретировать как ядро гомоморфизма $G(K[\delta]) \longrightarrow G(K)$, при котором δ отображается в 0, см [6; 34; 62; 101]. Пусть G — подсхема в GL_n. Тогда алгебра Ли $\mathrm{Lie}(G_K)$ состоит из матриц вида $e + z\delta$, где $z \in M_n(K)$, удовлетворяющих условиям, определяющим $G(K)$. В следующей лемме мы конкретизируем это утверждение в случае, когда G является стабилизатором системы многочленов.

Лемма 31. *Пусть* $f_1, \ldots, f_s \in K[x_1, \ldots, x_t]$. *Тогда для того, чтобы матрица* $e + z\delta$, *где* $z \in M_t(K)$ *принадлежала* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Fix}_K(f_1, \ldots, f_s))$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $h = 1, \ldots, s$ *выполнялось уравнение*

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant t} z_{ij} x_i \frac{\partial f_h}{\partial x_j} = 0.$$

Применим эту лемму для случая стабилизатора многочленов Плюккера $f_{K,L}(x)$, где $K \in \bigwedge^{m-1}[n]$, $L \in \bigwedge^{m+1}[n]$. Напомним, что для матричных элементов $z_{I,J}$ существует следующие три типа уравнений, см. доказательство Предложения 3 работы [16]. Далее через $\triangle$ мы обозначаем симметрическую разность двух множеств.

- Если $d(I, J) \leqslant m-2$, что соответствует случаю $|I \cup J| \geqslant m+2$, то все элементы $z_{I,J} = 0$.
- Если $d(I, J) = d(M, H) = m - 1$ и $I \triangle J = H \triangle M$, то $z_{I,J} = \pm z_{H,M}$.
- Наконец, если $d(I, J) = d(M, H) = m - 1$ и $I \triangle H = J \triangle M$, то $z_{I,I} \pm z_{H,H} = \pm z_{J,J} \pm z_{M,M}$.

Первый пункт не дает вклада в размерность алгебры Ли, так как $z_{I,J} = 0$ при $d(I, J) \leqslant m - 2$. Элементы $z_{I,J}$ с $d(I, J) = m - 1$ вносят вклад, равный $n(n - 1)$, а диагональные элементы $z_{I,I}$ вносят еще не более n линейно независимых переменных.

Перейдем к схемам $G_f(K)$ и $\overline{G}_f(K)$. Алгебра Ли $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ состоит из матриц $g = e + y\delta$, где $y \in M_N(K)$, удовлетворяющих условию $f(gx^1, \ldots, gx^k) = f(x^1, \ldots, x^k)$ для всех $x^1, \ldots, x^k \in K^N$. Аналогично $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ состоит из матриц $g = e + y\delta$, где $y \in M_N(K)$, удовлетворяющих условию $f(gx^1, \ldots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \ldots, x^k)$ для всех $x^1, \ldots, x^k \in K^N$.

Теорема 32. *Если* $n \neq 2m$, *то для любого поля* K *размерность алгебры Ли* $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ *не превосходит* n^2, *в то время как размерность алгебры Ли* $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ *не превосходит* $n^2 - 1$.

Доказательство. Во-первых заметим, что условия на элементы алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ получаются из соответствующих условий на элементы $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ подстановкой $\lambda(g) = 1$. Пусть g — матрица, удовлетворяющая условиям выше для всех $x^1, \ldots, x^k \in K^N$. Подставляя

$g = e + y\delta$ и, пользуясь k-линейностью формы f, получаем, что

$$\delta\Big(f(yx^1, x^2, \ldots, x^k) + \ldots + f(x^1, \ldots, x^{k-1}, yx^k)\Big) = (\lambda(g) - 1)f(x^1, \ldots, x^k).$$

Покажем, что элементы матрицы y удовлетворяют аналогичным линейным соотношениям, что и в случае схемы G_{nm}. По построению форма $f(e_{I_1}, \ldots, e_{I_k}) = 0$ для всех индексов $I_1, \ldots, I_k \in \Lambda^m[n]$ за исключением случаев, когда $\{I_j\}$ является разбиением множества $[n] = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k$.

- Если $d(I, J) \leqslant m - 2$, то $y_{I,J} = 0$. Действительно, тогда существует набор попарно непересекающихся индексов $I_2, \ldots, I_k \in \Lambda^m\Big([n] \smallsetminus I\Big)$ такой, что $d(J, I_2) = d(J, I_3) = 1$ и $d(J, I_4) = \ldots = d(J, I_k) = 0$. Положим $x^1 := e_J, x^l := e_{I_l}, 2 \leqslant l \leqslant k$. Тогда $f(x^1, yx^2, \ldots, x^k) = \ldots = f(x^1, x^2, \ldots, yx^k) = 0$. Из этого следует, что $f(yx^1, x^2, \ldots, x^k) = \pm y_{I,J} = 0$.
- Если $d(I, J) = m - 1$ и $I \triangle J = H \triangle M$ (то есть $I - J = H - M$ как корни Φ), тогда $y_{I,J} = \pm y_{H,M}$. В этом случае существует набор попарно непересекающихся индексов $M, I_3, \ldots, I_k \in \Lambda^m\Big([n] \smallsetminus I\Big)$ такой, что $d(J, M) = 1$ и $d(J, I_3) = \ldots = d(J, I_k) = 0$. Положим $x^1 := e_J, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}, 3 \leqslant l \leqslant k$ и обозначим через H индекс $[n] \smallsetminus (J \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k)$. Тогда $f(x^1, x^2, yx^3, \ldots, x^k) = \ldots = f(x^1, x^2, \ldots, yx^k) = 0$. Из этого следует что $f(yx^1, x^2, \ldots, x^k) + f(x^1, yx^2, x^3 \ldots, x^k) = 0$. Но $f(yx^1, x^2, \ldots, x^k) = \mathrm{sgn}(I, M, I_3, \ldots, I_k) \cdot y_{I,J}$, а $f(x^1, yx^2, x^3, \ldots, x^k) = \mathrm{sgn}(J, H, I_3, \ldots, I_k) \cdot y_{H,M}$.
- Наконец, если $d(I, M) = m - 1$ и $I \triangle M = H \triangle J$, то для диагональных элементов выполнено условие $y_{I,I} - y_{M,M} = y_{H,H} - y_{J,J}$. В этом случае существует набор попарно непересекающихся индексов $I_3, \ldots, I_k \in \Lambda^m\Big([n] \setminus (I \cup J)\Big)$, то есть $I, J, I_3, \ldots, I_k$ является разбиением множества $[n]$. Положим $x^1 := e_I, x^2 := e_J, x^l := e_{I_l}$ для $3 \leqslant l \leqslant k$. Тогда

  $$(\lambda(g) - 1) = \delta(y_{I,I} + y_{J,J} + y_{I_3,I_3} + \ldots + y_{I_k,I_k}).$$

  С другой стороны $H, M, I_3, \ldots, I_k$ тоже является разбиением множества $[n]$, где $I \cup J = H \cup M$. Подставляя $x^1 := e_H, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}$ для $3 \leqslant l \leqslant k$, получаем

  $$(\lambda(g) - 1) = \delta(y_{M,M} + y_{H,H} + y_{I_3,I_3} + \ldots + y_{I_k,I_k}).$$

  Объединяя полученные равенства, видим, что $y_{I,I} + y_{J,J} = y_{M,M} + y_{H,H}$.

Таким образом, соотношения, получившиеся в этих трех пунктах, аналогичны соотношениям в предыдущей лемме. Элементы $y_{I,J} = 0$ при $d(I, J) \leqslant m - 2$ не вносят вклад в размерность. Элементы $y_{I,J}$ при $d(I, J) = m - 1$ вносят вклад, равный $(n^2 - n)$ — число корней системы Φ. Последний пункт позволяет представить любой элемент $y_{I,I}$ в виде линейной комбинации $y_{K_j,K_j}, 1 \leqslant j \leqslant n$, где среди попарных разностей весов K_j каждый простой корень встречается хотя бы один раз. Например, следуя работе [16], можно взять веса

$\{1,\ldots,m-1,p\}$, где $m \leqslant p \leqslant n$ и $\{1,\ldots,\hat{i},\ldots,m+1\}$, где $1 \leqslant i < m$. На рисунке 3 показано, как именно они располагаются на весовой диаграмме (A_5, ϖ_2). Следовательно, размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ не превосходит $n^2 - n + n = n^2$. Для алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ верно аналогичное рассуждение с условием $\lambda(g) = 1$. Поэтому размерность $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ тоже не превосходит n^2.

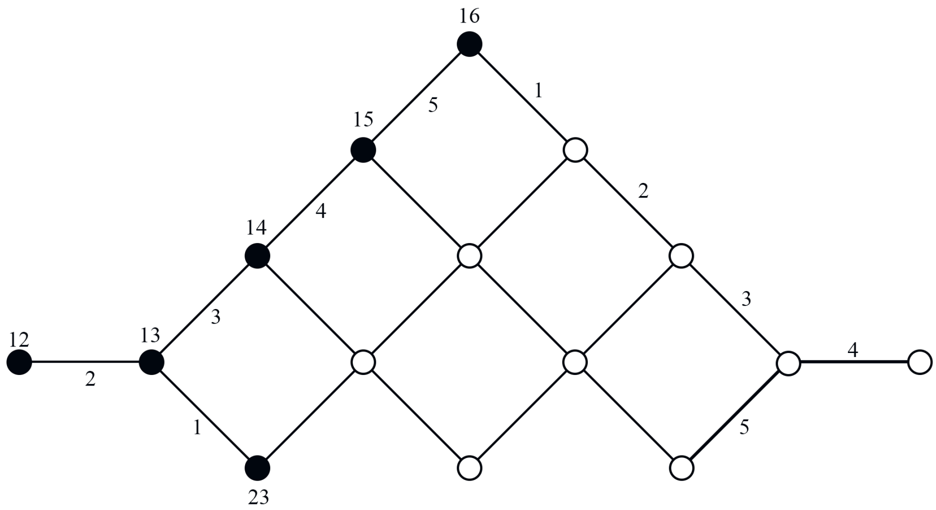

Рис. 3: Веса для диагональных элементов в (A_5, ϖ_2)

Для завершения доказательства осталось уменьшить размерность $\mathrm{Lie}(G_f(K))$. Далее для краткости записи индексы $I \in \bigwedge^m[n]$ мы будем интерпретировать как веса соответствующего представления, а корни $\alpha = c_1\alpha_1 + \ldots + c_{n-1}\alpha_{n-1} \in A_{n-1}$ записывать в форме Дынкина как $c_1 \ldots c_{n-1}$, где α_j — простые корни A_{n-1}. Например, $\delta = 1\ldots1$ — максимальный корень A_{n-1}. Пусть K_1 — старший вес представления $\bigwedge^m$, а $I_2,\ldots,I_k$ — стандартное разбиение множества $[n] \setminus K_1$ на m-элементные подмножества, то есть $I_2 > I_3 > \ldots > I_k$. Подставляя $x^1 := e_{K_1}, x^2 := e_{I_2}, \ldots, x^k := e_{K_k}$, получим:

$$y_{K_1,K_1} + y_{I_2,I_2} + \ldots + y_{I_k,I_k} = 0.$$

Далее, заметим, что для любого j: $K_1 - I_j = c_1^j\alpha_1 + \ldots + c_{n-1}^j\alpha_{n-1}$, и, используя уже доказанные соотношения $y_{I,I} - y_{M,M} = y_{H,H} - y_{J,J}$ для $I - M = H - J$, представим все диагональные элементы y_{I_j,I_j} в виде линейных комбинаций y_{K_j,K_j}. Таким образом, мы получим нетривиальное соотношение на элементы y_{K_j,K_j}, уменьшив размерность на 1. Ниже мы приводим детальное описание получения уравнения для произвольной внешней степени.

Используя введенные обозначения, получим $K_1 - I_2 = 12\ldots m\ldots 210\ldots 0$, $K_1 - I_3 = 12\ldots\underbrace{m\ldots m}_{m+1 \text{ раз}}\ldots 210\ldots 0$, или в общем случае $K_1 - I_j = 12\ldots\underbrace{m\ldots m}_{(j-2)\cdot m+1}\ldots 21\underbrace{0\ldots 0}_{n-mj}$ для $2 \leqslant j \leqslant k$. Напомним, нумерация введенных весов K_j такая, что $\alpha_m = K_1 - K_2, \alpha_{m+1} = K_2 - K_3, \ldots, \alpha_{n-1} = K_{n-m} - K_{n-m+1}, \alpha_{m-1} = K_2 - K_{n-m+2}, \alpha_{m-2} = K_{n-m+2} - K_{n-m+3}, \ldots, \alpha_1 = K_{n-1} - K_n$

(в случае внешнего квадрата $\alpha_{m-1} = \alpha_1 = K_2 - K_{n-m+2}$). Тогда при $3 \leqslant j \leqslant k$:

$$\begin{aligned}
y_{K_1,K_1} - y_{I_j,I_j} = {} & (y_{K_{n-1},K_{n-1}} - y_{K_n,K_n}) + 2(y_{K_{n-2},K_{n-2}} - y_{K_{n-1},K_{n-1}}) + \ldots \\
& + (m-1)(y_{K_2,K_2} - y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}}) \\
& + m\Big((y_{K_1,K_1} - y_{K_2,K_2}) + \ldots + (y_{K_{m(j-2)+1},K_{m(j-2)+1}} - y_{K_{m(j-2)+2},K_{m(j-2)+2}})\Big) \\
& + (m-1)(y_{K_{m(j-2)+2},K_{m(j-2)+2}} - y_{K_{m(j-2)+3},K_{m(j-2)+3}}) + \ldots \\
& + 2(y_{K_{m(j-1)-1},K_{m(j-1)-1}} - y_{K_{m(j-1)},K_{m(j-1)}}) + (y_{K_{m(j-1)},K_{m(j-1)}} - y_{K_{m(j-1)+1},K_{m(j-1)+1}}) \\
= {} & m y_{K_1,K_1} + (m-1) y_{K_2,K_2} - y_{K_{m(j-2)+2},K_{m(j-2)+2}} - \ldots - y_{K_{m(j-1)+1},K_{m(j-1)+1}} \\
& - y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}} - \ldots - y_{K_n,K_n},
\end{aligned}$$

а при $j = 2$, имеем

$$\begin{aligned}
y_{K_1,K_1} - y_{I_2,I_2} = {} & (y_{K_{n-1},K_{n-1}} - y_{K_n,K_n}) + 2(y_{K_{n-2},K_{n-2}} - y_{K_{n-1},K_{n-1}}) + \ldots \\
& + (m-1)(y_{K_2,K_2} - y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}}) \\
& + m(y_{K_1,K_1} - y_{K_2,K_2}) \\
& + (m-1)(y_{K_2,K_2} - y_{K_3,K_3}) + \ldots \\
& + 2(y_{K_{m-1},K_{m-1}} - y_{K_m,K_m}) + (y_{K_m,K_m} - y_{K_{m+1},K_{m+1}}) \\
= {} & m y_{K_1,K_1} + (m-2) y_{K_2,K_2} - y_{K_3,K_3} - \ldots - y_{K_{m+1},K_{m+1}} \\
& - y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}} - \ldots - y_{K_n,K_n}.
\end{aligned}$$

Осталось сложить все полученные равенства с уравнением $y_{K_1,K_1} + y_{I_2,I_2} + \ldots + y_{I_k,I_k} = 0$. Таким образом, итоговое уравнение на диагональные элементы будет следующим

$$\begin{aligned}
(m(k-1)-k) y_{K_1,K_1} + \Big((m-1)(k-1)-1\Big) y_{K_2,K_2} - y_{K_3,K_3} - \ldots - y_{K_{n-m+1},K_{n-m+1}} \\
- (k-1) y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}} - \ldots - (k-1) y_{K_n,K_n} = 0.
\end{aligned}$$

Это дает нетривиальное соотношение между элементами y_{K_j,K_j}, которое (над полем произвольной характеристики) обеспечивает уменьшение оценки на размерность алгебры Ли еще на 1. Следовательно, $\dim \mathrm{Lie}(G_f(K)) \leqslant n^2 - 1$. □

Приведем пример последних вычислений для $\bigwedge^2 E_6(R)$. Расположение весов K_j отмечено на рисунке 3. Из условия сохранения формы получаем, что $y_{12,12} + y_{34,34} + y_{56,56} = 0$.

- Так как $12 - 34 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$, то

$$\begin{aligned}
y_{12,12} - y_{34,34} &= (y_{13,13} - y_{23,23}) + 2(y_{12,12} - y_{13,13}) + (y_{13,13} - y_{14,14}) \\
&= 2y_{12,12} - y_{14,14} - y_{23,23}.
\end{aligned}$$

- Так как $12-56=\alpha_1+2(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+\alpha_5$, то

$$\begin{aligned} y_{12,12}-y_{56,56} &= (y_{13,13}-y_{23,23})+2\Big((y_{12,12}-y_{13,13}) \\ &\qquad +(y_{13,13}-y_{14,14})+(y_{14,14}-y_{15,15})\Big)+(y_{15,15}-y_{16,16}) \\ &= 2y_{12,12}+y_{13,13}-y_{15,15}-y_{16,16}-y_{23,23}. \end{aligned}$$

Таким образом, сложив полученные три уравнения, получим нетривиальное для поля произвольной характеристики соотношение на элементы y_{K_j,K_j}:

$$y_{12,12}+y_{13,13}-y_{14,14}-y_{15,15}-y_{16,16}-2y_{23,23}=0.$$

Мы проверили все условия из Леммы 29 и готовы завершить доказательство Теоремы 27.

Теорема 33. *Если $n\neq 2m$, то имеют место изоморфизмы $\overline{G}_F\cong\bigwedge^m\mathrm{GL}_n$ и $G_F\cong\bigwedge^m\mathrm{SL}_n$ аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Рассмотрим рациональное представление алгебраических групп

$$\textstyle\bigwedge^m\colon\ \mathrm{GL}_n(\_\,)\longrightarrow\mathrm{GL}_N(\_\,).$$

Из Леммы 19 мы знаем, что ядро этого морфизма равно μ_m, а по Утверждению 26 его образ содержится в схеме $\overline{G}_f$. Таким образом $\bigwedge^m$ индуцирует мономорфизм алгебраических групп

$$\phi\colon\ \mathrm{GL}_n/\mu_m\longrightarrow\overline{G}_f.$$

Применим к морфизму ϕ Лемму 29. Очевидно, что для алгебраически замкнутого поля $\dim\bigwedge^m\mathrm{GL}_n(K)=n^2$, а по теореме 32 $\dim\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))\leqslant n^2$, поэтому условие 1 из Леммы 29 выполняется. Как мы уже отметили выше, условие 3 Леммы 29 также выполняется. Таким образом, применяя лемму 29, мы можем заключить, что ϕ это изоморфизм $\bigwedge^m\mathrm{GL}_n(\_\,)$ и $\overline{G}_f(\_\,)$ аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$. Для схемы G_f доказательство полностью аналогично. □

Благодаря этому изоморфизму, мы получили, что для произвольных колец класс матриц из $\bigwedge^m\mathrm{GL}_n(R)$ строго больше, чем образы $\bigwedge^m g$, где $g\in\mathrm{GL}_n(R)$. Действительно, предположим, что $n\neq 2m$ (иначе все рассуждения следует проводить для соответствующей связной компоненты группы), тогда точная последовательность аффинных групповых схем

$$1\longrightarrow\mu_m\longrightarrow\mathrm{GL}_n\longrightarrow\mathrm{GL}_n/\mu_m\longrightarrow 1$$

дает точную последовательность когомологий Галуа

$$1 \longrightarrow \mu_m(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n/\mu_m(R) \longrightarrow \\ H^1(R, \mu_m) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n/\mu_m).$$

Множества когомологий, входящие в эту последовательность, хорошо известны, см. [67, Глава III, §2], либо [16, §9] или [99] для случая внешних квадратов. $H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ классифицирует проективные R-модули P ранга n, в частности, $H^1(R, \mathrm{GL}_1)$ классифицирует обратимые R-модули, то есть конечно-порожденные проективные R-модули ранга 1. Множество $H^1(R, \mathrm{GL}_1)$ имеет групповую структуру, индуцированную тензорным произведением. Эта группа называется группой Пикара $\mathrm{Pic}(R)$, элементами которой являются скрученные формы свободного R-модуля R. Для описания $H^1(R, \mu_m)$ запишем точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1 \xrightarrow{(\_)^m} \mathrm{GL}_1 \longrightarrow 1,$$

где $(\_)^m$ — морфизм возведения в m-ую степень. Тогда с учетом того, что $(\mathrm{GL}_1)^m(R) = R^{*m}$, получаем

$$1 \longrightarrow R/R^{*m} \longrightarrow H^1(R, \mu_m) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R),$$

где правая стрелка индуцирована морфизмом $(\_)^m$. Таким образом $H^1(R, \mu_m)$ классифицирует проективные модули P ранга 1 вместе с изоморфизмом $P^{\otimes m} = R$. Для вычисления ядра отображения $H^1(R, \mu_m) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ заметим, что морфизм $\mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ пропускается через $\mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$:

$$\begin{tikzcd} \mu_m \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{GL}_n \\ & \mathrm{GL}_1 \arrow[ur, hook, "\text{scalar}"'] & \end{tikzcd}$$

Так как $H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ классифицирует проективные модули ранга n, а вложение $\mathrm{GL}_1 \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ посылает λ в λe, то в когомологиях отображение $H^1(R, \mathrm{GL}_1) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ посылает обратимый модуль P в $\bigoplus_1^n P$, таким образом ядро отображения $H^1(R, \mu_m) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ содержит всю группу R^*/R^{*m} и более того, те элементы P группы Пикара $\mathrm{Pic}(R)$ кольца R, для которых $P^{\otimes m} = R$ и $\bigoplus_1^n P$ свободен ($= R^n$).

Резюмируя, мы видим, что фактор-группа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ по $\bigwedge^m \big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ содержит копию группы R^*/R^{*m} и дальнейший фактор по этой копии является подгруппой группы Пикара $\mathrm{Pic}(R)$, состоящей из тех обратимых модулей P над R, для которых $P^{\otimes m} = R$ и $\bigoplus_1^n P$ свободен.

Для специальной линейной группы ситуация похожая. Точная последовательность аффинных групповых схем

$$1 \longrightarrow \mu_d \longrightarrow \mathrm{SL}_n \longrightarrow \mathrm{SL}_n/\mu_d \longrightarrow 1$$

дает точную последовательность когомологий

$$1 \longrightarrow \mu_d(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n/\mu_d(R) \longrightarrow H^1(R,\mu_d) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{SL}_n) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{SL}_n/\mu_d),$$

где $d = \text{НОД}(n,m)$. Представленные множества также хорошо известны, см. [67, Глава III, §2].

Определитель $\det\colon \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_1$ индуцирует отображение на кольцах $(\det)^1_*\colon H^1(R,\mathrm{GL}_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R)$. Пусть $[P] \in H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ класс, представленный проективным модулем P ранга n. Для любого автоморфизма α модуля P, $\det(\alpha) \in R$ является индуцированным автоморфизмом n-ой внешней степени $\bigwedge^n P$. Поэтому, $(\det)^1_*([P]) = [\bigwedge^n P]$ и

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(R) \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m(R) \longrightarrow 1.$$

Опишем множество когомологий $H^1(R,\mathrm{SL}_n)$. Пусть P — проективный R–модуль ранга n такой, что $\bigwedge^n P \cong R$, и пусть $\delta_P\colon \bigwedge^n P \longrightarrow R$ — фиксированный изоморфизм. Изоморфизм $\psi\colon P \longrightarrow Q$ называется изоморфизмом пары $(P,\delta_P) \cong (Q,\delta_Q)$, если $\delta_Q \bigwedge^n \psi = \delta_P$. Через $[P,\delta_P]$ обозначим класс изоморфизмов (P,δ_P). Тогда для любого автоморфизма ψ пары (P,δ_P) верно, что $\delta_P \bigwedge^n \psi = \delta_P$, следовательно, $\det(\psi) = 1$. Таким образом, множество $H^1(R,\mathrm{SL}_n)$ задается классами $[P,\delta_P]$, то есть проективными модулями P ранга n вместе с фиксированным изоморфизмом $\bigwedge^n P = R$. А отображение $H^1(R,\mathrm{SL}_n) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ соответствует $[P,\delta_P] \mapsto [P]$.

Как отмечалось выше, $H^1(R,\mu_d)$ классифицирует проективные модули P ранга 1 вместе с изоморфизмом $P^{\otimes d} = R$. А отображение $H^1(R,\mu_d) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{SL}_n)$ посылает проективный модуль P в прямую сумму $\bigoplus_1^n P = P \oplus \ldots \oplus P$. Таким образом его ядро, также как и фактор-группа $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ по $\bigwedge^m\big(\mathrm{SL}_n(R)\big)$, содержит проективные модули P ранга 1 такие, что $P^{\otimes d} = R$ и $P \oplus \ldots \oplus P = R^n$.

2.3. **Внешние степени как стабилизатор инвариантных форм II.** В предыдущем параграфе мы полностью разобрали случай одной инвариантной формы. Если же $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$, то оказывается, что у группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ существует идеал инвариантных форм. Расширим определение формы $q(x)$ из §2.2. По умолчанию $q(x)$ рассматривается от множества $[n] = \{1,\ldots,n\}$, но далее нам понадобятся формы от некоторых подмножеств внутри $[n]$. Для этого определим $q^m_V(x)$ для некоторого n_1-подмножества $V \subseteq [n]$, где $\frac{n_1}{m} \in \mathbb{N}$:

- $q^m_V(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1,\ldots,I_{\frac{n_1}{m}})\, x_{I_1}\ldots x_{I_{\frac{n_1}{m}}}$ для четных m;
- $q^m_V(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1,\ldots,I_{\frac{n_1}{m}})\, x_{I_1}\wedge\ldots\wedge x_{I_{\frac{n_1}{m}}}$ для нечетных m,

где суммы в обоих случаях берутся по всем неупорядоченным разбиениям множества V в m-элементные подмножества $I_1,\ldots,I_{\frac{n_1}{m}}$.

Как обычно, пусть $f^m_V(x^1,\ldots,x^k)$ обозначает (*полную*) *поляризацию* формы $q^m_V(x)$, где $k := \frac{n_1}{m}$. В дальнейшем мы будем опускать степень m в формах $f^m_V(x^1,\ldots,x^k)$ и $q^m_V(x)$.

Далее, разделим n на m с остатком: $n = lm+r$, где $l, r \in \mathbb{N}$ и рассмотрим идеал $Y = Y_{n,m}$ в кольце $\mathbb{Z}[x_I]$, порожденный формами $f_V(x^1, \ldots, x^k)$ для всех возможных $m \cdot l$-элементных подмножеств V внутри $[n]$.

Предположим, что Y порожден $f_{V_1}, \ldots, f_{V_p}$, где $p = \binom{n}{ml}$, тогда определим $\overline{G}_Y(R)$ как группу линейных преобразований, сохраняющих идеал Y:

$$\overline{G}_Y(R) := \{g \in GL_N(R) \mid \text{ существуют } \lambda_{V_1}, \ldots, \lambda_{V_p} \in R^*, c(V_k, V_l) \in R \text{ такие, что}$$
$$f_{V_j}(gx^1, \ldots, gx^k) = \lambda_{V_j}(g) f_{V_j}(x^1, \ldots, x^k) + \sum_{l \neq j} c(V_j, V_l) \cdot f_{V_l}(x^1, \ldots, x^k)$$
$$\text{для всех } 1 \leqslant j \leqslant p \text{ и } x^1, \ldots, x^k \in R^N\}.$$

Другими словами $\overline{G}_Y(R) = \mathrm{Fix}_R(Y)$ для любого коммутативного кольца R. Прежде всего убедимся, что $\overline{G}_Y$ является групповой схемой. Для этого воспользуемся следующим стандартным рассуждением.

Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — произвольные полиномы от t переменных с коэффициентами из коммутативного кольца R. Мы интересуемся линейными заменами переменных $g \in GL_t(R)$, которые сохраняют условие, что все эти многочлены одновременно обращаются в ноль. Другими словами, мы рассматриваем все матрицы $g \in GL_t(R)$, сохраняющие идеал A кольца $R[x_1, \ldots, x_t]$, порожденный $f_1, \ldots, f_s$. Хорошо известно (см., например, [48, Лемма 1] или [99, Предложение 1.4.1]), что множество $G_A(R) = \mathrm{Fix}_R(A) = \mathrm{Fix}_R(f_1, \ldots, f_s)$ всех таких линейных замен переменных образует группу. Для любой R-алгебры S с 1 мы можем рассматривать $f_1, \ldots, f_s$ как полиномы с коэффициентами в S, тогда группа $G(S)$ определена для всех R-алгебр. При этом очевидно, что $G(S)$ зависит функториально от S. Но, к сожалению, функтор $S \mapsto G(S)$ не обязательно является аффинной групповой схемой над R. Это связано с тем, что $G_A(R)$ задается сравнениями, а не уравнениями на матричные элементы. Тем не менее в Теореме 1.4.3 работы [99] представлено простое достаточное условие, при котором функтор $S \mapsto G(S)$ будет аффинной группой схемой. Обозначим через $R[x_1, \ldots, x_t]_r$ подмодуль многочленов степени, не превосходящей r. Следующая лемма является Следствием 1.4.6 в [99].

Лемма 34. *Пусть $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_t]$ — многочлены, степени которых не превосходят r и A — порожденный ими идеал. Тогда для того чтобы функтор $S \mapsto \mathrm{Fix}_S(f_1, \ldots, f_s)$ был аффинной групповой схемой достаточно, чтобы ранг пересечения $A \cap R[x_1, \ldots, x_t]_r$ был постоянным при редукции по модулю p для всех простых чисел $p \in \mathbb{Z}$.*

Применим эту лемму для идеала $A = Y$ в $\mathbb{Z}[x_I]$.

Лемма 35. *Пусть $n = ml + r$, где $m, l \in \mathbb{N}$. Тогда функтор $R \mapsto \overline{G}_Y(R)$ является аффинной групповой схемой над $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Покажем, что если p — простое число, то все многочлены f_{V_j}, порождающие идеал Y, независимы по модулю p. Действительно, подбирая значение x_I, можно добиться того, чтобы одна из форм принимала значение ± 1, а остальные обращались в 0. В самом деле, пусть $I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_l = V_j$ — разбиение некоторого ml-подмножества $V_j \subset [n]$. Положим $x_{I_j} := 1$ для $j = 1, \ldots, l$, и $x_I = 0$ для всех остальных переменных. Произведение $x_{I_1} \ldots x_{I_l}$ входит в единственную форму, для которой и построено разбиение $V_j = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_l$, таким образом значение многочлена f_{V_j} есть $\operatorname{sgn}(I_1, \ldots, I_l) = \pm 1$. □

Теперь, когда мы знаем, что $\overline{G}_Y$ это алгебраическая групповая схема, нашей ближайшей целью становится доказательство ее совпадения с $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Для этого снова воспользуемся Леммой 29. С учетом результатов последних двух параграфов нам необходимо только проверить гладкость $\overline{G}_Y$ и совпадение $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ и $\overline{G}_Y^0(K)$ для алгебраически замкнутых полей. Заметим, что доказательство следующего результата полностью идентично доказательству Утверждения 30.

Утверждение 36. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, тогда*

$$\textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) = \overline{G}_Y^0(K).$$

Осталось показать, что схема $\overline{G}_Y$ гладкая, то есть, фактически, вычислить размерность соответствующей алгебры Ли. Как и выше, можно отождествить алгебру Ли $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ с ядром гомоморфизма, который δ переводят в 0 в кольце двойных чисел $K[\delta]$. Получаем, что для идеала Y алгебра $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ состоит из матриц $g = e + y\delta$, где $y \in M_N(K)$, удовлетворяющих условиям $f_{V_j}(gx^1, \ldots, gx^k) = \lambda_{V_j}(g) f_{V_j}(x^1, \ldots, x^k) + \sum\limits_{l \neq j} c(V_j, V_l) f_{V_l}(x^1, \ldots, x^k)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant p$ и $x^1, \ldots, x^k \in K^N$.

Теорема 37. *Для любого поля K размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ не превосходит n^2.*

Доказательство. Пусть g — матрица, удовлетворяющая условиям выше для всех $1 \leqslant j \leqslant p$ и $x^1, \ldots, x^k \in K^N$. Подставляя $g = e + y\delta$ и, пользуясь k-линейностью форм f_{V_j}, получаем, что для любого $1 \leqslant j \leqslant p$ выполнены:

$$\begin{aligned}\delta\Big(f_{V_j}(yx^1, x^2, \ldots, x^k) + \ldots + f_{V_j}(x^1, \ldots, x^{k-1}, yx^k)\Big)\\ = (\lambda_{V_j}(g) - 1) f_{V_j}(x^1, \ldots, x^k) + \sum_{l \neq j} c(V_j, V_l) f_{V_l}(x^1, \ldots, x^k).\end{aligned}$$

Проверим, что элементы матрицы y удовлетворяют аналогичным линейным соотношениям, что и в доказательстве Теоремы 32. По построению форма $f_{V_j}(e_{I_1}, \ldots, e_{I_k}) = 0$ для любого набора $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m V_j$ за исключением случаев, когда $\{I_l\}$ являются разбиением множества $V_j = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k$.

- Если $d(I, J) \leqslant m-2$ ($|I \cup J| \geqslant m+2$), то $y_{I,J} = 0$. Действительно, тогда существует набор попарно непересекающихся индексов $I_2, \dots, I_k \in \bigwedge^m \big(V_j \setminus I\big)$ такой, что $d(J, I_2) = d(J, I_3) = 1$ и $d(J, I_4) = \dots = d(J, I_k) = 0$. Положим $x^1 := e_J, x^l := e_{I_l}, 2 \leqslant l \leqslant k$. Тогда $f_{V_j}(x^1, yx^2, \dots, x^k) = \dots = f_{V_j}(x^1, x^2, \dots, yx^k) = 0$. Из этого следует, что $f_{V_j}(yx^1, x^2, \dots, x^k) = \pm y_{I,J} = 0$.
- Если $d(I, J) = d(M, H) = m-1$, тогда $y_{I,J} = \pm y_{H,M}$. В этом случае существует набор набор попарно непересекающихся индексов $M, I_3, \dots, I_k \in \bigwedge^m \big(V_j \setminus I\big)$ такой, что $d(J, M) = 1$ и $d(J, I_3) = \dots = d(J, I_k) = 0$. Положим $x^1 := e_J, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}, 3 \leqslant l \leqslant k$ и обозначим через H индекс $V_j \setminus (J \cup I_2 \cup \dots \cup I_k)$. Тогда $f_{V_j}(x^1, x^2, yx^3, \dots, x^k) = \dots = f_{V_j}(x^1, x^2, \dots, yx^k) = 0$. Из этого следует что $f_{V_j}(yx^1, x^2, \dots, x^k) + f_{V_j}(x^1, yx^2, x^3 \dots, x^k) = 0$. Но $f_{V_j}(yx^1, x^2, \dots, x^k) = \mathrm{sgn}(I, M, I_3, \dots, I_k) \cdot y_{I,J}$, а $f_{V_j}(x^1, yx^2, x^3, \dots, x^k) = \mathrm{sgn}(J, H, I_3, \dots, I_k) \cdot y_{H,M}$.
- Наконец, для диагональных элементов выполнено условие $y_{I,I} - y_{M,M} = y_{H,H} - y_{J,J}$, где $d(I, J) = d(H, M) = 0$ и $I \cup J = H \cup M$. Существует набор попарно непересекающихся индексов $I_3, \dots, I_k \in \bigwedge^m \big(V_j \setminus (I \cup J)\big)$, то есть $I, J, I_3, \dots, I_k$ является разбиением множества V_j. Положим $x^1 := e_I, x^2 := e_J, x^l := e_{I_l}$ для $3 \leqslant l \leqslant k$. Тогда, заметив что все формы $f_{V_l}(x^1, \dots, x^k) = 0$ для $l \neq j$, получим

  $$(\lambda_{B_j}(g) - 1) = \delta(y_{I,I} + y_{J,J} + y_{I_3,I_3} + \dots + y_{I_k,I_k}).$$

  С другой стороны $H, M, I_3, \dots, I_k$ тоже является разбиением множества V_j, где $I \cup J = H \cup M$. Подставляя $x^1 := e_H, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}$ для $3 \leqslant l \leqslant k$, получаем

  $$(\lambda_{B_j}(g) - 1) = \delta(y_{M,M} + y_{H,H} + y_{I_3,I_3} + \dots + y_{I_k,I_k}).$$

  Объединяя полученные равенства, видим, что $y_{I,I} + y_{J,J} = y_{M,M} + y_{H,H}$.

Таким образом, также как и доказательстве Теоремы 32, размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ не превосходит n^2: элементы $y_{I,J} = 0$ с $d(I, J) \leqslant m-2$ не вносят вклад в размерность, элементы $y_{I,J}$ с $d(I, J) = m-1$ вносят вклад равный $n(n-1)$, и, наконец, диагональные элементы $y_{I,I}$ вносят еще дополнительный вклад n. □

Таким образом мы проверили все условия из Леммы 29, и можем заключить, что $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ совпадает со стабилизатором идеала Y. Доказательство этого результата идентично доказательству Теоремы 33.

Теорема 38. *Если $n = ml + r$, где $m, l \in \mathbb{N}$, то имеет место изоморфизм $\overline{G}_Y \cong \bigwedge^m \mathrm{GL}_n$ аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$.*

2.4. Теорема о нормализаторе.

Теорема 39. *Пусть* R *— коммутативное кольцо и пусть* $n \geqslant 4$. *Тогда*

$$N\Big(\bigwedge^m E_n(R)\Big) = N\Big(\bigwedge^m SL_n(R)\Big) = \mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^m E_n(R), \bigwedge^m SL_n(R)\Big) = \bigwedge^m GL_n(R),$$

где все нормализаторы и транспортеры берутся в $GL_N(R)$.

Доказательство. Очевидно, что $\bigwedge^m GL_n(R) \leqslant N\Big(\bigwedge^m SL_n(R)\Big)$. А по Теореме 4 верно, что $\bigwedge^m GL_n(R) \leqslant N\Big(\bigwedge^m E_n(R)\Big)$. С другой стороны оба нормализатора $N\Big(\bigwedge^m E_n(R)\Big)$ и $N\Big(\bigwedge^m SL_n(R)\Big)$ очевидно содержатся в $\mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^m E_n(R), \bigwedge^m SL_n(R)\Big)$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно проверить, что $\mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^m E_n(R), \bigwedge^m SL_n(R)\Big)$ содержится в $\bigwedge^m GL_n(R)$.

Пусть группа $\bigwedge^m GL_n(R)$ задается одной инвариантной формой, то есть n делится на m. Рассмотрим любые $g \in \mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^m E_n(R), \bigwedge^m SL_n(R)\Big)$ и $h \in \bigwedge^m E_n(R)$. Тогда $a := ghg^{-1}$ принадлежит $\bigwedge^m SL_n(R)$ и потому:

$$f(ax^1, \dots, ax^k) = f(x^1, \dots, x^k)$$

для всех $x^1, \dots, x^k \in R^N$. Подставляя $(gx^1, \dots, gx^k)$ вместо $(x^1, \dots, x^k)$, получим

$$f(ghx^1, \dots, ghx^k) = f(gx^1, \dots, gx^k)$$

для всех $x^1, \dots, x^k \in R^N$. Рассмотрим форму $D\colon R^N \times \ldots \times R^N \longrightarrow R$, определенную правилом

$$D(x^1, \dots, x^k) := f(gx^1, \dots, gx^k).$$

Тогда наше предположение принимает следующий вид

$$D(hx^1, \dots, hx^k) = D(x^1, \dots, x^k)$$

для любых $x^1, \dots, x^k \in R^N$ и для всех $h \in \bigwedge^m E_n(R)$. Таким образом, форма D инвариантна под действием группы $\bigwedge^m E_n(R)$. Поэтому

$$D(x^1, \dots, x^k) = \lambda \cdot f(x^1, \dots, x^k)$$

для некоторого $\lambda \in R$. Так как это рассуждение верно и для g^{-1}, то константа λ обратима. Следовательно, g принадлежит группе $\overline{G}_f(R)$, которая по Теореме 33 совпадает с $\bigwedge^m GL_n(R)$. $\square$

Следствие 40. *В условиях теоремы,*

$$\mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^m E_n(R), \bigwedge^m GL_n(R)\Big) = \bigwedge^m GL_n(R).$$

Доказательство. Требуется доказать, что если для некоторого $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ верно включение $[g, \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] \leqslant \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, тогда $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Действительно, по Теореме 4 верно следующее включение.

$$\Big[g, \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\Big] \leqslant \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R).$$

А так как группа $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ совершенна, то, используя лемму о трех подгруппах, получаем $g \in N(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)) = \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. $\square$

3. Разложение унипотентов

В настоящей главе мы построим трансвекции, с помощью которых будет осуществляться ключевой шаг в извлечении нетривиального корневого унипотента в схеме стандартного описания надгрупп и других задач, см. [13; 17—19; 31; 32; 84—86; 91], а также работу [96], где содержится много дальнейших ссылок.

3.1. Теоремы стабилизации. В бивекторном представлении мы построим трансвекцию $T_{*,j}$ в $\bigwedge^2 E_n(R)$, стабилизирующую произвольный столбец матрицы g в $GL_N(R)$. Однако в общем случае произвольной внешней степени построить трансвекцию $T_{*,j}$ не представляется возможным. Это связано с быстрым ростом вычета трансвекции при увеличении степени m. Напомним, что вычет $\operatorname{res}\left(\bigwedge^m t_{i,j}(\xi)\right)$ равен биномиальному коэффициенту $\binom{n-2}{m-1}$. Даже для внешнего куба не существует трансвекции, стабилизирующей столбец произвольной матрицы из группы $GL_N(R)$.

Теорема 41. *Пусть w произвольный вектор в R^N, $n \geqslant 3$. Положим*

$$T_{*,j} := \prod_{s\neq j} \bigwedge^2 t_{s,j}(\operatorname{sgn}(s,j)w_{sj}), \ \text{где } j \in [n].$$

Тогда $T_{*,j} \cdot w = w$.

Замечание 42. Аналогично, элемент $T_{i,*} := \prod_{s\neq i} \bigwedge^2 t_{i,s}(\operatorname{sgn}(i,s)z_{is})$, $i \in [n]$ стабилизирует произвольную строчку $z \in {}^N R$, то есть, $z \cdot T_{i,*} = z$.

Раскроем *идею доказательства* и *способы появления формул* в теореме 41. По формуле (1) внешняя трансвекция $\bigwedge^2 t_{i,j}(\xi)$ может быть представлена как произведение $(n-2)$ элементарных трансвекций. Таким образом $T_{*,j}$ это произведение $(n-1)\cdot(n-2)$ элементарных трансвекций в $E_N(R)$. Для случая $n = 5$ трансвекция $T_{*,5}$ это произведение следующих корневых унипотентов: $T_{*,5} = x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{15}) \cdot x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{25}) \cdot x_{\alpha_3+\alpha_4}(+w_{35}) \cdot x_{\alpha_4}(+w_{45})$. В терминах элементарных трансвекций $T_{*,5}$ равно

$$\begin{aligned} &t_{12,25}(-w_{15})t_{13,35}(-w_{15})t_{14,45}(-w_{15}) \cdot t_{12,15}(+w_{25})t_{23,35}(-w_{25})t_{24,45}(-w_{25}) \\ &\qquad \cdot t_{13,15}(+w_{35})t_{23,25}(+w_{35})t_{34,45}(-w_{35}) \cdot t_{14,15}(+w_{45})t_{24,25}(+w_{45})t_{34,35}(+w_{45}). \end{aligned}$$

На рисунке 4 мы показали все эти трансвекции. Различные типы стрелочек соответствуют различным унипотентам. Заметим, что знаки в выражениях выше появляются по определению внешних трансвекций. А именно, индексы $I = \{i_1, i_2\}$, $J = \{j_1, j_2\}$ в вычислениях необязательно появляются в возрастающем порядке. Таким образом нам необходимо вычислить $\operatorname{sgn}(i_1 i_2, j_1 j_2) = \operatorname{sgn}(i_1, i_2)\cdot\operatorname{sgn}(j_1, j_2)$. Следовательно, $t_{I,J}(\xi) = t_{\sigma(I),\pi(J)}(\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)\xi)$ где $\sigma(I), \pi(J)$ в возрастающем порядке.

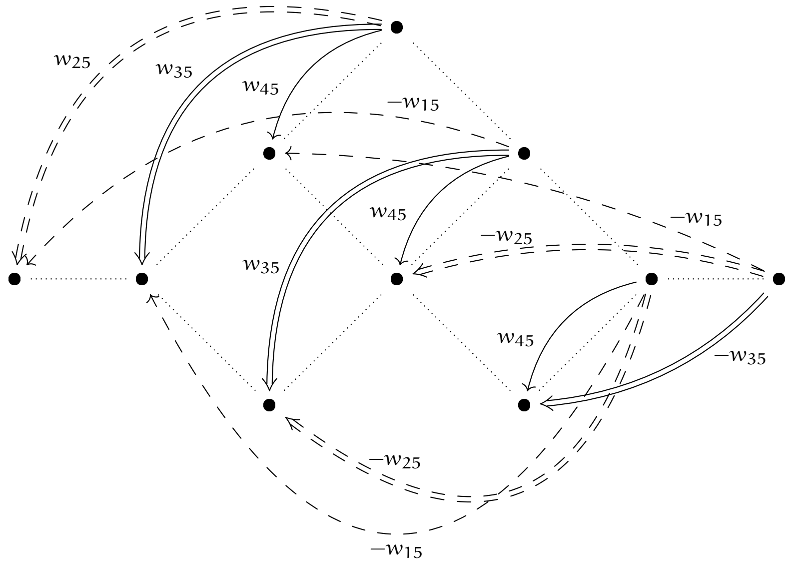

Рис. 4: Трансвекция $T_{*,5}$ на весовой диаграмме (A_4, ϖ_2).

Доказательство теоремы 41. Трансвекция $T_{*,j}$ действует на вектор w добавлением выражения

$$z(p,q,j) := \operatorname{sgn}(pq, jq)\operatorname{sgn}(p,j) w_{pj} w_{jq} + \operatorname{sgn}(qp, jp)\operatorname{sgn}(q,j) w_{qj} w_{jp}$$

к $\binom{n-1}{2}$ координатам w_{pq}, $pq \in \bigwedge^2([n] \setminus j)$, то есть $(T_{*,j} w)_{pq} = w_{pq} + z(p,q,j)$. Необходимо проанализировать 6 случаев для чисел $1 \leqslant p, q, j \leqslant n$. Ниже мы приводим анализ этих случаев. Нам необходимо только проверить, что выражения $z(p,q,j)$ обнуляются.

- $(-1)(+1) w_{pj} w_{jq} + (+1)(+1) w_{qj} w_{jp} = 0$ для $p < q < j$;
- $(+1)(+1) w_{pj} w_{jq} + (+1)(-1) w_{qj} w_{jp} = 0$ для $p < j < q$;
- $(+1)(-1) w_{pj} w_{jq} + (-1)(-1) w_{qj} w_{jp} = 0$ для $j < p < q$;
- $(-1)(-1) w_{pj} w_{jq} + (+1)(-1) w_{qj} w_{jp} = 0$ для $j < q < p$;
- $(+1)(-1) w_{pj} w_{jq} + (+1)(+1) w_{qj} w_{jp} = 0$ для $q < j < p$;
- $(+1)(+1) w_{pj} w_{jq} + (-1)(+1) w_{qj} w_{jp} = 0$ для $q < p < j$.

□

Пусть теперь g — матрица в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, то есть столбцы $g_{*,J}$ удовлетворяют соотношениям Плюккера. Построим трансвекцию в $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$, стабилизирующую столбец с использованием уравнений Плюккера.

Идея построения матрицы состоит в следующем. Зафиксируем вершину на весовой диаграмме (=зафиксируем одну координату в произвольном векторе) и подберём внешние трансвекции так, чтобы результатом их действия на эту вершину было соотношение Плюккера максимальной длины $(m+1)$. При этом окажется, что на других вершинах диаграммы результаты действий трансвекций будут также многочлены Плюккера различных длин. Так как вектор является столбцом матрицы в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, все многочлены Плюккера равны нулю и вектор стабилизируется.

Рассмотрим подсистему A_{n-m} в (A_n, ϖ_m), соответствующую последним $m+1$ весам (A_n, ϖ_m) в лексикографическом порядке. Обозначим через γ_i корни в подсистеме A_{n-m}, начиная с младшего веса (A_n, ϖ_m). Например, для (A_5, ϖ_2), $\gamma_1 = 56, \gamma_2 = 46, \gamma_3 = 45$, см рисунок 5.

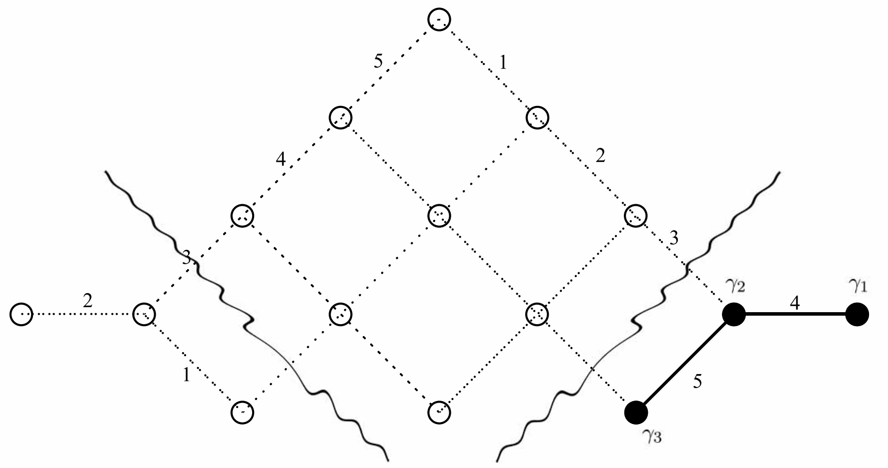

Рис. 5: A_3 в (A_5, ϖ_2)

Теорема 43. *Пусть w — столбец матрицы в группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 2m+1$. Положим*

$$T_1 := \textstyle\bigwedge^m t_{m,m+1}(w_{\gamma_1}) \bigwedge^m t_{m,m+2}(-w_{\gamma_2}) \dots \bigwedge^m t_{m,2m+1}((-1)^m w_{\gamma_{m+1}}),$$

тогда трансвекция T_1 стабилизирует столбец w: $T_1 \cdot w = w$.

Замечание 44. Для внешнего квадрата может показаться, что это утверждение является более слабым, чем Теорема 41. Однако, в построении трансвекции T_1 участвуют ровно $m+1$ внешних трансвекций для произвольного n, в то время как для построения $T_{*,j}$ количество элементарных трансвекций равно $(n-1)\cdot(n-2)$.

Доказательство. Трансвекция T_1 это произведение унипотентов

$$x_{\alpha_m}(+w_{\gamma_1}) x_{\alpha_m+\alpha_{m+1}}(-w_{\gamma_2}) \dots x_{\alpha_m+\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_{2m}}((-1)^m w_{\gamma_{m+1}}).$$

Оно действует на вектор w добавлением многочленов Плюккера $f_{J,\{m+1,\dots,2m+1\}}$ к $\binom{n-1}{m-1}$ координатам вектора w, где $J \in \bigwedge^{m-1}([n] \setminus m)$. А именно,

$$(T_1 w)_{m \cup J} = w_{m \cup J} + f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w).$$

Длина многочлена Плюккера $f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w)$ зависит от мощности $J \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m+1\}$. Если $|J \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m+1\}| = m-1$, тогда это тривиальный многочлен Плюккера. При уменьшении мощности пересечения длина многочлена будет возрастать. Максимальная длина будет достигнута при пустом пересечении. Так как координаты вектора w удовлетворяют соотношения Плюккера, то все $f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w) = 0$. $\square$

Пример 45. Пусть $m = 2$ и $n = 5$. Тогда

$$T_1 = \bigwedge^2 t_{2,3}(w_{45}) \bigwedge^2 t_{2,4}(-w_{35}) \bigwedge^2 t_{2,5}(w_{34}) = x_{\alpha_2}(+w_{45}) x_{\alpha_2+\alpha_3}(-w_{35}) x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{34}).$$

Все многочлены Плюккера $f_{i,345}(w)$, где $i \in [n] \setminus 2$ короткие или тривиальные. Если $i \in \{3, 4, 5\}$, тогда $f_{i,345}(w)$ тривиален и имеет вид $w_A w_B - w_B w_A = 0$. Иначе, $i \in [n] \setminus \{2, 3, 4, 5\}$, $f_{i345}(w) = w_{45} w_{3i} - w_{35} w_{4i} + w_{34} w_{5i}$.

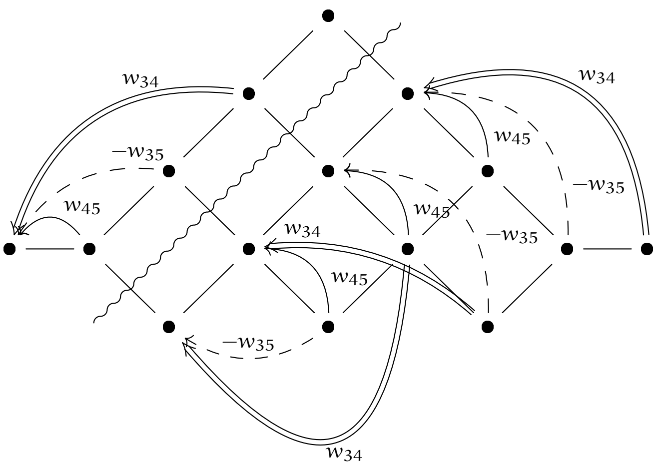

Рис. 6: Трансвекция T_1 на весовой диаграмме (A_5, ϖ_2)

Пример 46. Пусть теперь $m = 3$ и $n = 7$. В этом случае

$$T_1 = \bigwedge^3 t_{3,4}(w_{567}) \bigwedge^3 t_{3,5}(-w_{467}) \bigwedge^3 t_{3,6}(w_{457}) \bigwedge^3 t_{3,7}(-w_{456})$$

изменяет $\binom{6}{2} = 15$ координат вектора w. В терминах корневых унипотентов это произведение равно $x_{\alpha_3}(+w_{567}) x_{\alpha_3+\alpha_4}(-w_{467}) x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}(+w_{457}) x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}(-w_{456})$. Тогда многочлены Плюккера $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}}$ существуют трёх типов[2].

6: Пусть $\{i, j\} \subseteq \{4, 5, 6, 7\}$, тогда $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}}$ снова тривиален, и соотношение $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}} = 0$ утверждает, что Грассмановы координаты коммутируют.

8: Пусть теперь i или j принадлежит $\{4, 5, 6, 7\}$. Не умаляя общности будем считать, что $i = 4, j \notin \{4, 5, 6, 7\}$. Тогда $f_{\{4,j\},\{4,5,6,7\}} = -x_{4j5} x_{467} + x_{4j6} x_{457} - x_{4j7} x_{456}$ — многочлен длины 3.

1: Наконец, максимальная длина 4 будет достигаться, если $i, j \notin \{4, 5, 6, 7\}$. В этом случае $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}} = x_{ij4} x_{567} - x_{ij5} x_{467} + x_{ij6} x_{457} - x_{ij7} x_{456}$.

3.2. **Уравнения на внешние степени.** В этом параграфе мы представим различные серии уравнений на схему $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Для начала сформулируем свойство принадлежности

[2]Нумерация по количеству изменённых координат в векторе w

матрицы g к $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Именно в таком виде мы планируем использовать уравнения для разложения унипотентов. Для этого расширим определение элементов матрицы $g_{I,J}$ для мультимножеств $I = \{i_l\}_{l=1}^m$ и $J = \{j_l\}_{l=1}^m$. Напомним, что мультимножеством называется объединение необязательно различных элементов, то есть это двойка (A, m), где A — базовое множество, а $m\colon A \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ — функция кратности. Далее, мы будем опускать, где это естественно, функцию m из записи двойки (A, m). Если $(A, m_A), (B, m_B)$ — два мультимножества, то их *арифметической суммой* называется мультимножество $A+B$, состоящее из всех элементов, которые присутствуют хотя бы в одном из мультимножеств, и кратность каждого элемента равна сумме кратностей соответствующих элементов в складываемых мультимножествах: $A + B = \{m_{A+B}(x)x \mid m_{A+B}(x) = m_A(x) + m_B(x)\}$. Если в мультимножествах (I, m_I) или (J, m_J) существуют элементы i_l или j_l такие, что их кратности $m_I(i_l)$ или $m_J(j_l)$ больше нуля, то будем считать, что $g_{I,J} = 0$, например $g_{12,11} = g_{22,11} = 0$.

Теорема 47. *Если матрица* $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ *принадлежит группе* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 3$, *тогда для любых индексов* $B, D \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что* $d(B, D) \geqslant m-1$ *и любого мультимножества* $I + J$, *где* $I \in \bigwedge^{m-1}[n], J \in \bigwedge^{m+1}[n]$, *выполнено равенство:*

$$\sum_{A+C=I+J} \operatorname{sgn}(A, C) g_{A,B} g_{C,D} = 0,$$

где сумма берётся по всем разбиениям мультимножества $I + J$ *в* m*-элементные индексы* A *и* C *из* $\bigwedge^m[n]$.

Доказательство. Так как матрица $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, тогда g должна сохранять идеал Плюккера Plu, порожденный многочленами Плюккера $f_{I,J}$, где $I \in \bigwedge^{m-1}[n], J \in \bigwedge^{m+1}[n]$. Пусть $x \in R^N$, тогда

$$f_{I,J}(gx) = \sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h (gx)_{I \cup \{j_h\}} (gx)_{J \setminus \{j_h\}} = \sum_{K,L \in \bigwedge^m[n]} \left(\sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h g_{I\cup\{j_h\},K} \cdot g_{J\setminus\{j_h\},L} \right) x_K x_L. \qquad (8)$$

Обозначим через $a_{I+J}^{K,L}$ — коэффициент при мономе $x_K x_L$, который, очевидно, идентичен коэффициенту при $x_L x_K$. Тогда $a_{I+J}^{K,L}$ можно представить в следующем виде

$$a_{I+J}^{K,L} = \sum_{A+C=I+J} \operatorname{sgn}(A, C) g_{A,K} g_{C,L},$$

где суммирование берётся по всем разбиением мультимножества $I + J$ на пары m-элементных подмножеств A и C. Для завершения доказательства осталось заметить, что условие сохранения идеала Plu гарантирует равенство нулю всех коэффициентов $a_{I+J}^{K,L}$ в формуле (8) при $d(K, L) \geqslant m - 1$. $\square$

Для внешнего квадрата мы можем написать не только свойство, но и критерий принадлежности матрицы, используя это доказательство.

Утверждение 48. *Матрица* $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ *принадлежит группе* $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ *тогда и только тогда, когда верны следующие равенства:*

- *Для любого* $H \in \bigwedge^4[n]$ *и для всех* $B, D \in \bigwedge^2[n]$ *таких, что* $B \cap D \neq \emptyset$, *выполнено:*

$$a_H^{B,D}(g) = \sum_{A \sqcup C = H} \mathrm{sgn}(A, C) g_{A,B} g_{C,D} = 0;$$

- *Для любого* $H \in \bigwedge^4[n]$ *и любых* $B, D, B', D' \in \bigwedge^2[n]$ *таких, что* $B \cup D = B' \cup D'$ *и* $B \cap D = \emptyset$, *выполнено:*

$$\mathrm{sgn}(B, D) \cdot a_H^{B,D}(g) = \mathrm{sgn}(B', D') \cdot a_H^{B',D'}(g).$$

Напомним, что группа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ является стабилизатором инвариантной формы или идеала форм. Используя этот факт, мы представим ещё один вид уравнений, определяющих принадлежность матрицы $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ к группе $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Для простоты будем рассматривать неисключительный случай единственной формы, то есть $k := \frac{n}{m} \geqslant 3$ — натуральное и m четно. Доказательство для нечётного m аналогично. По Теореме 27 у группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ существует инвариантная полиномиальная форма

$$f(x^1, \ldots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \ldots, I_k)\, x^1_{I_1} \ldots x^k_{I_k},$$

где суммирование берётся по всем упорядоченным разбиениям множества $[n]$ в m-элементные подмножества $I_1, \ldots, I_k$. Введём обозначение частной производной инвариантной формы f:

$$f_I(x^2, \ldots, x^k) := f(e^I, x^2, \ldots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I, I_2, \ldots, I_k) x^2_{I_2} \ldots x^k_{I_k},$$

где суммирование берётся по всем упорядоченным разбиениям множества $[n] \setminus I$ на m-элементные подмножества $I_2 \ldots, I_k$. Кроме этого для любого набора попарно непересекающихся индексов $\mathcal{I} := \{I_2, \ldots, I_k\}$, где $I_l \in \bigwedge^m[n]$ обозначим через $\overline{\mathcal{I}}$ индекс $[n] \setminus (I_2 \cup \ldots \cup I_k) \in \bigwedge^m[n]$, то есть это дополнение набора $\mathcal{I}$ до целого множества $[n]$.

Теорема 49. *Пусть* $k = \frac{n}{m} \geqslant 3$ — *натуральное число. Матрица* $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ *принадлежит группе* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

- *Для всех индексов* $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что среди набора* $\mathcal{I} = \{I_2, \ldots, I_k\}$ *есть два пересекающихся, то есть таких, что существуют* $2 \leqslant l_1 \neq l_2 \leqslant k$: $d(I_{l_1}, I_{l_2}) \geqslant 1$, *имеем*

$$f_{I_1}(g_{*,I_2}, g_{*,I_3}, \ldots, g_{*,I_k}) = 0;$$

- *Для всех индексов* $I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что среди наборов* $\mathcal{I} = \{I_2, \ldots, I_k\}, \mathcal{J} = \{J_2, \ldots, J_k\}$ *нет пересекающихся, то есть таких, что для любых*

$2 \leqslant l_1 \neq l_2 \leqslant k$: $d(I_{l_1}, I_{l_2}) = d(J_{l_1}, J_{l_2}) = 0$, *имеем*

$$\mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{J}}, J_2, \ldots, J_k) g'_{\overline{\mathcal{J}}, J_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) = \mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}).$$

Доказательство. Пусть $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, тогда существует мультипликатор $\lambda(g) \in R^*$ такой, что для всех $x^1, \ldots, x^k \in R^N$ выполнено

$$f(gx^1, \ldots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \ldots, x^k). \tag{9}$$

Заметим, что это условие равносильно такому же, где вместо набора векторов x^l используются базисные векторы e^{I_l} для всех $I_l \in \bigwedge^m[n]$.

Пусть сначала среди набора $\mathcal{I} = \{I_2, \ldots, I_k\}$ есть два индекса с расстоянием больше нуля. Для краткости записи будем считать, что это индексы I_2 и I_3. Тогда условие (9) эквивалентно $f(ge^{I_1}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех $I_l, l \neq 2, 3$, что эквивалентно $f(x^1, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех $x^1 \in R^N$ и $I_l \in \bigwedge^m[n], l \geqslant 4$. А это условие, в свою очередь, эквивалентно заявленному условию $f(e^{I_1}, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех $I_1, I_4, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$.

Рассмотрим второй случай. Пусть среди набора $\mathcal{I}$ нет пересекающихся индексов. Тогда равенство (9) эквивалентно тому, что $f(gx^1, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = \lambda(g) f(x^1, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k})$ для всех $x^1 \in R^N$. Если вместо x^1 взять вектор $g^{-1}x^1$, тогда получим $f(x^1, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = \lambda(g) f(g^{-1}x^1, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k})$ для всех $x^1 \in R^N$. Достаточно требовать выполнения этого условия только для базисного вектора $x^1 = e^{I_1}$, то есть $f(e^{I_1}, ge^{I_2}, \ldots, ge^{I_k}) = \lambda(g) f(g^{-1}e^{I_1}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k})$. Левая часть последнего условия снова есть $f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k})$. Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} \lambda(g) f(g^{-1}e^{I_1}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}) &= \lambda(g) f(g'_{*,I_1}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}) = \\ &= \lambda(g) \sum_{L \in \bigwedge^m[n]} g'_{L,I_1} f(e^{I_L}, e^{I_2}, \ldots, e^{I_k}) = \lambda(g)\, \mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1}. \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от мультипликатора $\lambda(g)$, необходимо рассмотреть другой набор $J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $J_2, \ldots, J_k$.

Пусть теперь H — аффинная схема над $\mathbb{Z}$, определённая уравнениями из формулировки теоремы. Требуется доказать, что $H(R) \subseteq \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ для локального кольца R. Пусть M — максимальный идеал R. Из первой серии уравнений следует, что $f(ge^{I_1}, \ldots, ge^{I_k}) = 0$ для всех индексов $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ таких, что среди $I_2, \ldots, I_k$ есть пересекающиеся. Таким образом для завершения доказательства осталось только найти $\lambda \in R^*$ такое, что $f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) = \lambda\, \mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1}$ для всех индексов $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ таких, что среди $I_2, \ldots, I_k$ нет пересекающихся.

Докажем вначале, что существуют индексы $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$ такие, что $g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in R^*$. Предположим обратное, то есть для всех

$I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$: $g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in M$. Заметим, что найдутся $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$ такие, что $g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} \in R^*$, для этого достаточно при фиксированных $I_2, \ldots, I_k$ варьировать I_1. Кроме этого, найдутся другие $J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $J_2, \ldots, J_k$ такие, что $f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}) \in R^*$. В самом деле, иначе при любых фиксированных $J_1, J_2 \in \bigwedge^m[n]$ с учётом уравнений на пару близких столбцов имеем $f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}) \in M$ для всех $J_3, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$. Отсюда следует по линейности, что $f_{J_1}(g_{*,J_2}, x^3, \ldots, x^k) \in M$ для всех $x^3, \ldots, x^k \in R^N$. Но это значит, что $f_{J_1}(g_{*,J_2}, e^{L_3}, \ldots, e^{L_k}) = \pm g_{[n]\setminus(J_1 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_k), J_2} \in M$ для всех $J_1, L_3, \ldots, L_k \in \bigwedge^m[n]$, что невозможно. Следовательно, $g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in M$ и $g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{J_1}(g_{*,J_2}, \ldots, g_{*,J_k}) \in R^*$, что противоречит тому, что g принадлежит $H(R)$. Таким образом существуют индексы $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ с непересекающимися $I_2, \ldots, I_k$ такие, что $g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}) \in R^*$. Пусть тогда

$$\lambda := \operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \ldots, I_k) \left(g'_{\overline{\mathcal{I}}, I_1}\right)^{-1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \ldots, g_{*,I_k}).$$

□

Полученные две серии равенств называются уравнениями на *набор близких столбцов* и *два набора далёких столбцов*. Именно в таком виде мы планируем их использовать в первоначальной задаче описания надгрупп элементарных групп. Однако часто удобно использовать уравнения, в которых присутствуют всего два столбца. Введём обозначения другой частной производной инвариантной формы f:

$$f_{I_3,\ldots,I_k}(x, y) := f(x, y, e^{I_3}, \ldots, e^{I_k}) = \sum \operatorname{sgn}\Big(J_1, J_2, I_3, \ldots, I_k\Big) x_{J_1} y_{J_2},$$

где суммирование берётся по всем упорядоченным разбиениям множества $[n] \setminus (I_3 \cup \ldots \cup I_k)$ в пары m-элементных подмножеств J_1, J_2. Аналогично Теореме 49, получаются уравнения на *пары близких* и *две пары далёких столбцов*.

Теорема 50. *Пусть* $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. *Матрица* $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ *принадлежит группе* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

- *Для любых индексов* $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что* $d(I_1, I_2) \geqslant 1$, *имеем*

$$f_{I_3,\ldots,I_k}(g_{*,I_1}, g_{*,I_2}) = 0;$$

- *Для любых двух наборов индексов* $I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ *таких, что* $d(I_1, I_2) = d(J_1, J_2) = 0$, *имеем*

$$\sum_{L_j \in \bigwedge^m[n]} \operatorname{sgn}(J_1, J_2, L_3, \ldots, L_k) g'_{L_3,J_3} \ldots g'_{L_k,J_k} \cdot f_{I_3,\ldots,I_k}(g_{*,I_1}, g_{*,I_2}) =$$

$$= \sum_{L_j \in \bigwedge^m[n]} \operatorname{sgn}(I_1, I_2, L_3, \ldots, L_k) g'_{L_3,I_3} \ldots g'_{L_k,I_k} \cdot f_{J_3,\ldots,J_k}(g_{*,J_1}, g_{*,J_2}).$$

3.3. **Обратное разложение унипотентов.** Сформулируем вариацию разложения унипотентов для внешних степеней — "обратное разложение унипотентов". Уточним для этого понятия, связанные с конгруэнц-подгруппами по модулю идеала, введенные в §1.5. Будем использовать идентичное обозначение ρ_A для следующего гомоморфизма редукции:

$$\begin{aligned} \rho_A\colon \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R) &\longrightarrow \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A) \\ a &\mapsto \overline{a} = (\overline{a}_{I,J}) \end{aligned}$$

Ядро гомоморфизма ρ_A обозначается $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ и называется *главной* (*относительной*) *конгруэнц-подгруппой уровня* A. Обозначим полный прообраз центра $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)$ под действием гомоморфизма ρ_A через $\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$. Такая группа называется *полной* (*относительной*) *конгруэнц-подгруппой уровня* A. Заметим, что группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A) \leqslant \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$, $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ и $\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ являются нормальными в $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Утверждение 51. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$. Тогда для любого идеала $A \trianglelefteq R$ выполнено следующее равенство:*

$$[\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] = \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A).$$

Этот результат называется *стандартной коммутационной формулой.* Он доказывался многократно различными авторами в работах на разные тематики, например, в работе [61].

Далее, *верхним уровнем* матрицы $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ называется наименьший идеал $I = \mathrm{lev}(g) \trianglelefteq R$ такой, что $g \in \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, I)$. Так же как и в случае полной линейной группы, верхний уровень порождается внедиагональными элементами $g_{I,J}, I \neq J$ и попарными разностями диагональных элементов $g_{I,I} - g_{J,J}, I \neq J$. Заметим, что достаточно рассматривать только фундаментальные разности $g_{I,I} - g_{\bar{I},\bar{I}}$, где $\bar{I}$ — это следующий индекс после I в $\bigwedge^m[n]$ при лексикографическом порядке. Таким образом верхний уровень $\mathrm{lev}(g)$ порождается $\binom{n}{m}^2 - 1$ элементами.

Лемма 52. *Пусть $P_{ij} := \bigwedge^m t_{i,j}(1) \bigwedge^m t_{j,i}(-1) \bigwedge^m t_{i,j}(1) \in \bigwedge^m \mathrm{E}(n, R)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Тогда для любого индекса $k \neq i, j$ и любого $\xi \in R$ непосредственным вычислением выполнено следующее правило сопряжения внешней трансвекции:*

- ${}^{P_{ki}}\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \bigwedge^m t_{k,j}(\xi)$;
- ${}^{P_{kj}}\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \bigwedge^m t_{i,k}(\xi)$.

Пусть $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ и $h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Матрица вида $g^{\pm h}$ называется *элементарной* (*внешней*) *g-сопряжённой.*

Теорема 53 (Обратное разложение унипотентов). *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geqslant 2m+1$ и $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{lev}(g)$ трансвекция $\bigwedge^m t_{k,l}(\xi)$*

представляется в виде произведения не более чем $8\left(\binom{n}{m}^2-1\right)$ *элементарных сопряжённых к* g *и* g^{-1}*, а именно для любых* $1\leqslant k\neq l\leqslant n$ *и* $I,J\in\bigwedge^m[n], d(I,J)=p$*, имеем*

(1) $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,J})$ *представляется в виде произведения не более чем* $8(m-p)$ *элементарных внешних* g*-сопряжённых;*

(2) $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,I}-g_{J,J})$ *представляется в виде произведения не более чем* $24(m-p)$ *элементарных внешних* g*-сопряжённых.*

Мы докажем данный результат для интересующего нас случая внешнего квадрата полной линейной группы, используя стабилизацию столбца из Теоремы 41. Таким образом для $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ ограничение на n можно ослабить: $n\geqslant 4$. Но перед этим сформулируем следствие. Обратное разложение унипотентов можно рассматривать как более сильную версию стандартного описания $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$–нормализуемых подгрупп. Следовательно, у нас есть еще одно очень короткое доказательство Sandwich Classification Theorem для внешних степеней элементарных групп.

Теорема 54. *Пусть* H *подгруппа* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$*. Тогда* H *нормализуется* $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)\leqslant H\leqslant C\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R,A)$$

для некоторого идеала A *кольца* R*.*

Доказательство. Так же как и обратное разложение унипотентов, мы докажем это следствие для случая внешнего квадрата. Пусть H нормализуется $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$. Положим $A:=\{\xi\in R\mid \bigwedge^2 t_{1,2}(\xi)\in H\}$. Очевидно, что $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R,A)\leqslant H$. Осталось проверить, что если $g\in H$ тогда $g_{I,J}$, $g_{I,I}-g_{\tilde{I},\tilde{I}}\in A$. Но Теорема 53 утверждает в точности это требование. Следовательно, $H\leqslant C\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R,A)$. Обратное включение следует из Утверждения 51. $\square$

Докажем Теорему 53. Ключевым шагом является проверка утверждения для матрицы $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,J})$ в случае $p=1$. Все остальные случаи являются его следствиями.

Доказательство. Будем использовать стабилизацию столбца без соотношений Плюккера, чтобы ограничение на n было минимальным. Пусть $T:=T_{*,1}=\prod\limits_{s\neq 1}\bigwedge^2 t_{s,1}(g_{1s,12})$. По Теореме 41 первый столбец Tg равен первому столбцу матрицы g. Следовательно, первый столбец матрицы $h:=g^{-1}Tg$ стандартен, то есть h лежит в параболической подгруппе P_{12}.

Лемма 55. *Пусть* R *— коммутативное кольцо,* $n\geqslant 3$ *и* $g\in\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$*. Предположим, что один столбец матрицы* g *с индексом* $I=\{i_1i_2\}$ *тривиален, тогда для любых индексов* $K\in\bigwedge^2([n]\setminus\{i_1,i_2\})$ *и* $J\in\bigwedge^2[n]$ *таких, что* $d(I,J)=|I\cap J|=1$*, верно* $g_{K,J}=0$*.*

Доказательство. Предположим, что матрица g принадлежит $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$. Тогда по Теореме 47 для любых индексов $A, C \in \bigwedge^2[n]$, $d(A, C) = 1$ и любого $H \in \bigwedge^4[n]$, верно

$$\sum_{B \sqcup D = H} \operatorname{sgn}(B, D) g_{B,A} g_{D,C} = 0.$$

Пусть у g тривиальный столбец A. Тогда сумма выше равна $g_{H \setminus A, C}$. $\square$

По доказанной лемме матрица h также лежит в субмаксимальной параболической подгруппе ${}_K P_{12}$, где K соответствует последним $\binom{n-2}{2}$ строчкам.

Далее заметим, что для любых $j \in \{3, 4, 5, \ldots, n\}$ внешние трансвекции $\bigwedge^2 t_{1,j}(\xi)$ и $\bigwedge^2 t_{2,j}(\xi)$ принадлежат унипотентному радикалу U параболической подгруппы ${}_K P_{12}$. Используя очевидную формулу $[xy, z]^x = [y, z] \cdot [z, x^{-1}]$, мы получаем

$$z := [T^{-1}h, \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(1)]^{T^{-1}} = [h, \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(1)] \cdot [\textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(1), T].$$

Теперь матрица z это произведение четырех элементарных внешних сопряженных к g и g^{-1}. Первый коммутатор $[h, \bigwedge^2 t_{2,3}(1)]$ принадлежит унипотентному радикалу U, в то время как второй равен $\bigwedge^2 t_{2,1}(g_{13,12})$.

Так как трансвекция $\bigwedge^2 t_{1,3}(1)$ также принадлежит U, а унипотентный радикал абелев, мы получаем, что

$$[\textstyle\bigwedge^2 t_{1,3}(-1), z] = [\textstyle\bigwedge^2 t_{1,3}(-1), u \cdot \textstyle\bigwedge^2 t_{2,1}(g_{13,12})] = \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(g_{13,12}).$$

Следовательно, трансвекция $\bigwedge^2 t_{2,3}(g_{13,12})$ это произведение восьми элементарных внешних сопряженных к g и g^{-1}. По Лемме 52 из этого следует, что $\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{13,12})$ это произведение восьми элементарных внешних g-сопряженных. Осталось заметить, что мы можем перенести $g_{I,J}$ в позицию $(13, 12)$ сопряжением при помощи мономильаных матриц из $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$.

Так как $n \geqslant 4$, тогда существует два различных индекса $h_1, h_2 \in [n] \setminus \{i, j\}$. Заметим, что вхождение $g^{\bigwedge^2 t_{i,j}(-1)}$ в позиции (ih_1, ih_2) равно $g_{jh_1,ih_2} + g_{ih_1,ih_2}$. Применяя доказанный случай (1) для $p = 1$ к $g^{\bigwedge^2 t_{i,j}(-1)}$, мы получаем, что $\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh_1,ih_2} + g_{ih_1,ih_2})$ это произведение восьми элементарных внешних g-сопряженных. Таким образом

$$\textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh_1,ih_2}) = \textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh_1,ih_2} + g_{ih_1,ih_2}) \textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(-g_{ih_1,ih_2})$$

это произведение 16 элементарных внешних g-сопряженных.

Предположение (2) при $p = 1$ также следует из доказанного выше. Очевидно, что вхождение $g^{\bigwedge^2 t_{i,j}(1)}$ в позиции (ih, jh) равно $g_{ih,ih} - g_{jh,jh} + g_{ih,jh} - g_{jh,ih}$ для любого индекса $h \neq i, j$. Применяя (1) для $p = 1$, мы получаем, что $\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{ih,ih} - g_{jh,jh} + g_{ih,jh} - g_{jh,ih}) \in \bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$ это произведение восьми элементарных внешних g-сопряженных. Наконец,

$$\textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{ih,ih} - g_{jh,jh}) = \textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{ih,ih} - g_{jh,jh} + g_{ih,jh} - g_{jh,ih}) \textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh,ih} - g_{ih,jh})$$

это произведение 24 элементарных внешних g-сопряженных.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить последнее предположение. Существует индекс $K \in \bigwedge^2[n]$ такой, что $d(I,K) = d(J,K) = 1$. Следовательно,

$$\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{I,I} - g_{J,J}) = \bigwedge^2 t_{k,l}(g_{I,I} - g_{K,K}) \bigwedge^2 t_{k,l}(g_{K,K} - g_{J,J})$$

это произведение 48 элементарных внешних g-сопряженных. □

4. Стандартность решетки подгрупп

Извлечение унипотентного элемента (элементарной трансвекции) из промежуточной подгруппы H является ключевым шагом в схеме стандартного описания надгрупп. В предыдущих работах на эту задачу, например, совместные работы Николая Вавилова и Виктора Петрова о надгруппах классических групп, авторы извлекали нетривиальный корневой унипотентный элемент $a \in G(\Phi, R) \setminus N\Big(E(\Phi, R)\Big)$. Фактически, для этого из общего элемента извлекалось много унипотентов, для которых удавалось показать, что все они не могут стать тривиальными под действием канонического гомоморфизма, переводящего g в a.

Для внешних степеней техника Вавилова и Петрова недоступна. Тем не менее далее мы построим модифицированный метод, основанный на понятии общего элемента. С его помощью мы опишем все надгруппы внешнего квадрата элементарной группы. Заметим, что новый метод может быть применен не только для поливекторных представлений $E_n(R)$, но и для тензорных степеней элементарной группы или других случаев, таких как “Subsystem subgroups”, “Subring subgroups” и других.

4.1. **Предварительные сведения.** На протяжении этой главы нам понадобятся следующие дополнительные обозначения.

Все кольца и алгебры подразумеваются коммутативными и с единицей. Все гомоморфизмы сохраняют единичный элемент. Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R через $\rho_{\mathfrak{a}}$ обозначим гомоморфизм редукции по модулю $\mathfrak{a}$: $R \to R/\mathfrak{a}$. Если s это элемент кольца R, то $R_s = \langle s\rangle^{-1}R$ обозначает главную локализацию кольца, то есть локализация R в мультипликативное подмножество, порожденное s. Локализационный гомоморфизм $R \to R_s$ обозначается через λ_s.

Выражение “групповая схема” значит “плоская аффинная групповая схема конечного типа”. Пусть G — аффинная групповая схема над K. Обозначим через $A = K[G]$ аффинную алгебру G. По определению аффинной схемы элемент $h \in G(R)$ может быть отождествлен с кольцевым гомоморфизмом $h\colon A \to R$. Мы всегда предполагаем это отождествление. Обозначим через $g \in G(A)$ общий элемент G, то есть тождественное отображение $\mathrm{id}_A : A \to A$. Элемент $h \in G(R)$ индуцирует групповой гомоморфизм $G(h)\colon G(A) \to G(R)$ по правилу $G(h)(a) = h \circ a$. Таким образом, образ g под действием $G(h)$ равен h. В течении всей главы для кольцевого гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ мы будем обозначать этим же символом φ индуцированный гомоморфизм $G(\varphi)\colon G(R) \to G(R')$. Заметим, что это не приведет к путанице, поскольку мы всегда можем различать два значения φ по типу его аргумента. Таким образом $h(g) = h \circ \mathrm{id}_A = h$.

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал кольца R. Как обычно, $G(R, \mathfrak{a})$ обозначает главную конгруэнцподгруппу $G(R)$ уровня $\mathfrak{a}$, то есть ядро гомоморфизма редукции $\rho_{\mathfrak{a}}\colon G(R) \to G(R/\mathfrak{a})$.

Наконец, мы всегда предполагаем, что G это групповая схема Шевалле–Демазюра над кольцом K с приведенной неприводимой системой корней $\Phi \neq A_1$, и что либо $\Phi \neq C_2$, либо у K нет эпиморфизмов в поле из 2 элементов. В этой главе обозначим через $E(\mathfrak{a})$ элементарную подгруппу, то есть подгруппу $G(R)$, порожденную элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(r)$, $\alpha \in \Phi$, $r \in \mathfrak{a}$. Тогда $E(R)$ это (абсолютная) элементарная подгруппа $G(R)$ и $E(R,\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{a})^{E(R)}$ обозначает относительную элементарную подгруппу.

4.2. **Основная теорема.** Пусть $G = G(\Phi, \_)$ обозначает групповую схему Шевалле–Демазюра с приведенной неприводимой системой корней $\Phi \neq A_1$, и пусть $E = E(\Phi, \_)$ — функтор элементарной подгруппы. В данном разделе все алгебраические группы рассматриваются как аффинные групповые схемы над кольцом K, которое в приложениях равно $\mathbb{Z}$ или ее локализации. Мы всегда предполагаем, что $E(R)$ совершенна для всех K-алгебр R, что означает, что $\Phi \neq A_1$ и либо $\Phi \neq C_2$, либо у K нет эпиморфизмов в поле из двух элементов. Пусть $D\colon \mathfrak{Rings} \to \mathfrak{Groups}$ — подфунктор (необязательно подсхема) G. Для произвольной K-алгебры R с единицей пусть $\mathcal{L} := L\big(D(R), G(R)\big)$ — решетка подгрупп $G(R)$, содержащих $D(R)$. Наша цель — изучить решетку $\mathcal{L}$ при определенных условиях на D и G.

Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R обозначим через $E(R,\mathfrak{a})$ относительную элементарную подгруппу и через $N(R,\mathfrak{a})$ — нормализатор $D(R)E(R,\mathfrak{a})$ в $G(R)$. Положим $N(R) = N(R, 0)$. Для аффинной схемы X над кольцом K аффинная алгебра X обозначается через $K[X]$.

Решетка $\mathcal{L} = L\big(D(R), G(R)\big)$ называется *стандартной*, если для любой подгруппы $\Gamma \in \mathcal{L}$ существует единственный идеал $\mathfrak{a} \trianglelefteq R$ такой, что

$$D(R)E(R,\mathfrak{a}) \leqslant \Gamma \leqslant N(R,\mathfrak{a}).$$

Этот результат является главной целью данного раздела. Следуя терминологии Энтони Бака подрешетки $L\big(D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})\big)$ называются *сэндвичами*, а решетка $\mathcal{L}$ стандартная, когда она расщепляется на непересекающееся объединение сэндвичей.

Список условий. Пусть R — кольцо.

(1) Функтор D сохраняет сюрьективные отображения.

(2) Для K-алгебры R и идеала $\mathfrak{a} \trianglelefteq R$, верны равенства

$$[D(R), D(R)E(R,\mathfrak{a})] = D(R)E(R,\mathfrak{a}) \quad \text{и} \quad D(R) \leqslant E(R).$$

(3) Для любого $r \in R$ и $\alpha \in \Phi$ таких, что $x_\alpha(r) \notin D(R)$, верно равенство

$$\langle D(R), x_\alpha(r) \rangle = D(R)E(R, rR).$$

(4) Отображение $R \mapsto N(R)$ определяет замкнутую подсхему в G.

(5) Если $D(R)^h \leqslant N(R)$, тогда $h \in N(R)$.

(6) Для любого поля F подгруппа $D(F)$ является “почти максимальной” подгруппой в $G(F)$, то есть если подгруппа содержит $D(F)$, тогда либо она содержится в $N(F)$, либо содержит $E(F)$.

(7) Подгруппа $\langle D(A), g\rangle \leqslant G(A)$ содержит элементарный корневой унипотент $x_\alpha(\xi) \notin N(A)$. Более того, для любого поля F существует элемент $y \in E(F)$ такой, что $x_\alpha\big(y(\xi)\big) \notin N(F)$.

(8) Если $h \in G(R, \operatorname{Rad} R) \setminus N(R)$, тогда $\langle D(R), h\rangle$ содержит нетривиальный корневой унипотент.

Следующее утверждение вычисляет нормализатор $N(R, \mathfrak{a})$ в терминах $N(R/\mathfrak{a})$. Это будет использовано в доказательстве основного результата этого раздела. Идея заимствована из доказательства Теоремы 3 в работе [79]. Как обычно, мы будем использовать следующие очевидные формулы. $[x, yz] = [x, y] \cdot [x, z]^{y^{-1}}$ для всех элементов x, y, z абстрактной группы. Поэтому для подгрупп X, Y, Z таких, что YZ это подгруппа верно, что

$$[X, YZ] \leq [X, Y] \cdot [X, Z]^Y. \tag{10}$$

Вторая формула это стандартная коммутационная формула, полученная Джованни Таддеи [92] и Леонидом Васерштейном [95]. Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R, верно равенство

$$[E(R), G(R, \mathfrak{a})] = [E(R, \mathfrak{a}), G(R)] = E(R, \mathfrak{a}). \tag{11}$$

Лемма 56. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *— идеал кольца* R*. При выполнении условий* 1 *и* 2*,* $N(R, \mathfrak{a})$ *это полный прообраз* $N(R/\mathfrak{a})$ *под действием гомоморфизма редукции* $\rho_\mathfrak{a}$*.*

Доказательство. Так как естественное отображение $D(R) \to D(R/\mathfrak{a})$ сюрьективно, группа $\rho_\mathfrak{a}\big(N(R, \mathfrak{a})\big)$ нормализует $D(R/\mathfrak{a})$.

Обратно, пусть $h \in G(R)$ такое, что $\bar{h} = \rho_\mathfrak{a}(h) \in N(R/\mathfrak{a})$. Тогда

$$\rho_\mathfrak{a}\Big(D(R)^h\Big) \leqslant D(R/\mathfrak{a})^{\bar{h}} \leqslant D(R/\mathfrak{a}).$$

Используя сюрьективность отображения $D(R) \to D(R/\mathfrak{a})$, получим

$$D(R)^h \leqslant D(R)G(R, \mathfrak{a}). \tag{12}$$

По формулам (10) и (11),

$$\begin{aligned}[D(R), D(R)^h] \leq [D(R), D(R)G(R, \mathfrak{a})] \leqslant D(R)[D(R), G(R, \mathfrak{a})]^{D(R)} \\ = D(R)[D(R), G(R, \mathfrak{a})] \leqslant D(R)E(R, \mathfrak{a}).\end{aligned}$$

Возьмем взаимный коммутант обеих сторон (12) с $D(R)^h$. По условию 2 верно:

$$D(R)^h = [D(R)^h, D(R)^h] \leqslant [D(R)^h, D(R)G(R,\mathfrak{a})] \leqslant \\ [D(R)^h, D(R)] \cdot [D(R)^h, G(R,\mathfrak{a})]^{D(R)^h} \leqslant \\ D(R)E(R,\mathfrak{a})[E(R), G(R,\mathfrak{a})] = D(R)E(R,\mathfrak{a})$$

(мы также использовали стандартную коммутационную формулу и нормальность $E(R)$ в $G(R)$). Так как $E(R,\mathfrak{a})$ нормальна в $G(R)$ это включение влечет, что h нормализует группу $D(R)E(R,\mathfrak{a})$. □

Следующая лемма показывает, что приведенные выше условия влекут, что множество $N(R,\mathfrak{a}) \setminus D(R)E(R,\mathfrak{a})$ не содержит элементарных корневых унипотентов и устанавливает свойство единственности в определении стандартности решетки подгрупп.

Лемма 57. *Пусть $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ идеалы K-алгебры R. Тогда из условий 2 и 3 следует, что множество $N(R,\mathfrak{a}) \setminus D(R)E(R,\mathfrak{a})$ не содержит элементарных корневых унипотентов и что у сэндвичей $L\big(D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})\big)$ и $L\big(D(R)E(R,\mathfrak{b}), N(R,\mathfrak{b})\big)$ пустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\Gamma \in L\big(D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})\big)$. По условию 2,

$$[D(R), \Gamma] \geqslant [D(R), D(R)E(R,\mathfrak{a})] = D(R)E(R,\mathfrak{a}).$$

С другой стороны

$$[D(R), \Gamma] \leqslant [D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})] \leqslant D(R)E(R,\mathfrak{a}).$$

Таким образом идеал $\mathfrak{a}$ однозначно определен подгруппой Γ из сэндвича.

Если $x_\alpha(r) \in N(R,\mathfrak{a}) \setminus D(R)E(R,\mathfrak{a})$, тогда по условию 3, $E(R, rR) \leqslant N(R,\mathfrak{a})$. Из этого следует, что $D(R)E(R,\mathfrak{a}) \leqslant D(R)E(R,\mathfrak{a}+rR) \leqslant N(R,\mathfrak{a})$, что противоречит первому абзацу этого доказательства. □

Теорема 58. *При выполнении условий 1–8 для любой K-алгебры R решетка $\mathcal{L} = L\big(D(R), G(R)\big)$ стандартна.*

Доказательство. Пусть Γ — подгруппа в $G(R)$, содержащая $D(R)$. Положим

$$\mathfrak{a} := \{s \in R \mid \text{ существует } \alpha \in \Phi : \ x_\alpha(s) \in \Gamma \setminus D(R)\}.$$

Используя условие 3, мы получаем, что $D(R)E(R,\mathfrak{a}) \leqslant \Gamma$. Пусть $\overline{R} = R/\mathfrak{a}$ и $\overline{\Gamma} = \rho_\mathfrak{a}(\Gamma)$. Предположим, что $x_\alpha(\bar{r}) \in \overline{\Gamma} \setminus D(\overline{R})$ для некоторого $\alpha \in \Phi$ и $\bar{r} \in \overline{R}$. Используя условие 1, мы получаем, что $D(\overline{R}) \leq \overline{\Gamma}$ и по условию 3, $D(\overline{R})E(\overline{R}, \bar{r}\overline{R}) \leqslant \overline{\Gamma}$. Пусть $r \in R$ — прообраз элемента $\bar{r}$ под действием $\rho_\mathfrak{a}$. Тогда

$$D(R)E(R, rR) \leqslant \Gamma\, G(R,\mathfrak{a}).$$

Рассмотрим коммутант $D(R)$ с обеими частями последнего включения, тогда

$$[D(R), D(R)E(R, rR)] \leqslant [D(R), \Gamma\, G(R, \mathfrak{a})]. \tag{13}$$

По условию 2, левая часть равна $D(R)E(R, rR)$. С другой стороны, по формуле (10) правая часть включения (13) содержится в $[D(R), \Gamma] \cdot [D(R), G(R, \mathfrak{a})]^{\Gamma}$. Так как $D(R) \leqslant E(R)$, по стандартной коммутационной формуле эта группа содержится в $\Gamma \cdot E(R, \mathfrak{a})^{\Gamma} = \Gamma$. Заметим, что условие $x_\alpha(\bar{r}) \notin D(\overline{R})$ влечет $x_\alpha(r) \notin D(R)$. По определению идеала $\mathfrak{a}$, из этого следует, что $r \in \mathfrak{a}$. Таким образом, $\bar{r} = 0$ и множество $\overline{\Gamma} \setminus D(\overline{R})$ не содержит нетривиального корневого унипотента.

Теперь, пусть $\xi \in A$ — элемент из условия 7. Положим $x = x_\alpha(\xi) \in G(A)$. Для K-алгебры B пусть

$$S(B) = \{b \in G(B) \mid b(x) \in N(B)\}.$$

По условию 4, N это замкнутая подсхема G, определенная некоторым идеалом $\mathfrak{q} \trianglelefteq A$. Как обычно, обозначим $N = V(\mathfrak{q})$. Легко видеть, что $S = V\big(x(\mathfrak{q})A\big)$ это замкнутая подсхема в G. Для элемента $h \in \overline{\Gamma}$ корневой унипотентный элемент $x_\alpha\big(h(\xi)\big) = h\big(x\big)$ принадлежит подгруппе, порожденной h и $D(\overline{R})$. По предыдущему абзацу доказательства он должен принадлежать $N(\overline{R})$, следовательно, $h \in S(\overline{R})$. Так как h — произвольный элемент $\overline{\Gamma}$, мы можем заключить, что $\overline{\Gamma} \in S(\overline{R})$.

Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца $\overline{R}$. Обозначим через F поле вычетов $\overline{R}/\mathfrak{m}$. Подгруппа $\tilde{\Gamma} = \rho_{\mathfrak{m}}(\overline{\Gamma})$ содержится в $S(F)$, следовательно, по условию 7, $\tilde{\Gamma}$ не содержит $E(F)$. С другой стороны, $\tilde{\Gamma} \geqslant D(F)$. Поэтому, используя условие 6, мы получаем, что $\tilde{\Gamma} \leqslant N(F)$.

Пусть $h \in \overline{\Gamma}$ и пусть $\tilde{h} = \rho_{\mathfrak{m}}(h) = \rho_{\mathfrak{m}} \circ h$. Так как $\tilde{h} \in N(F)$, тогда $\tilde{h}(\mathfrak{q}) = 0$. Поэтому $h(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{m}$. Так как $\mathfrak{m}$ это произвольный максимальный идеал, тогда $h(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Rad} \overline{R}$. Следовательно, $\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}} \circ h(\mathfrak{q}) = 0$ и $\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}(h) \in N(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R})$.

Так как h — произвольный элемент $\overline{\Gamma}$, то $\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}(\overline{\Gamma}) \in N(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R})$. Из этого следует, что

$$\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}\Big(D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}}\Big) \leqslant D(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R})^{\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}(\overline{\Gamma})} \leqslant D(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R}),$$

Поэтому, $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \leqslant D(\overline{R}) G(\overline{R}, \operatorname{Rad} \overline{R})$.

Если существует элемент $ab \in D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \setminus N(R)$, где $a \in D(\overline{R})$ и $b \in G(\overline{R}, \operatorname{Rad} \overline{R})$, тогда $b \in D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \setminus N(R)$. Так как $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}}$ содержит подгруппу, порожденную $D(\overline{R})$ и b, из условия 8 следует, что $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}}$ содержит нетривиальный корневой унипотент. Но мы уже доказали, что $\overline{\Gamma}$ не содержит таких элементов. Это противоречие показывает нам, что $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \leqslant N(R)$. Условие 5 влечет, что $\overline{\Gamma} \leqslant N(R)$ и по Лемме 56, $\Gamma \leqslant N(R, \mathfrak{a})$. $\square$

4.3. **Транспортеры.** Мы начинаем с изучения свойств транспортеров. В этом разделе G обозначает алгебраическую группу над кольцом K, а X, Y — подфункторы G. К сожалению, в общем случае функция $R \mapsto \mathrm{Tran}_{G(R)}\big(X(R), Y(R)\big)$ не является подфунктором G. Тем не менее мы определяем схемно-теоретический транспортер $\mathrm{Tran}_G(X, Y)$ как подфунктор G, заданный по правилу

$$\mathrm{Tran}_G(X, Y)(R) = \{a \in G(R) \mid z^a \in Y(\tilde{R}) \text{ для всех } z \in X(\tilde{R}) \text{ и всех } R\text{-алгебр } \tilde{R}\}.$$

(мы всегда отождествляем элементы $G(R)$ с их каноническими образами в $G(\tilde{R})$).

Более общо, пусть w — групповое слово из 2 символов, то есть элемент свободной группы с 2 образующими. Для элементов z, a абстрактной группы Γ запись $w(z, a)$ обозначает образ w в Γ под действием группового гомоморфизма, посылающего первую образующую свободной группы в z и вторую в a. Для подмножеств Δ, Ω в Γ определим

$$\mathrm{Tran}^w_\Gamma(\Delta, \Omega) = \{a \in \Gamma \mid w(z, a) \in \Omega \text{ для всех } z \in \Delta\}.$$

Аналогично, определим схемно-теоретический w-транспортер $\mathrm{Tran}^w_G(X, Y)$ как подфунктор G, заданный по правилу

$$\mathrm{Tran}^w_G(X, Y)(R) = \{a \in G(R) \mid w(z, a) \in Y(\tilde{R}) \text{ для всех } z \in X(\tilde{R}) \text{ и всех } R\text{-алгебр } \tilde{R}\}.$$

Теперь мы сформулируем достаточные условия для того, чтобы схемно-теоретический w-транспортер был замкнут и обсудим равенство $\mathrm{Tran}^w_G(X, Y)(R) = \mathrm{Tran}^w_{G(R)}\big(X(R), Y(R)\big)$. Для обычных транспортеров (то есть для $w = x_2^{-1}x_1x_2$) эти результаты могут быть найдены в [78, Theorem 6.1] или [46, I, § 2, 7.7 and II, § 2, 3.6]). Напомним, что K-схема X называется локально-свободной, если существует открытое аффинное покрытие X_i, где i пробегает индексное множество такое, что аффинная алгебра X_i это свободный K-модуль для каждого i. В нашем случае X аффинная, таким образом, уточняя открытое покрытие, мы можем предполагать, что каждое X_i это главная аффинная открытая подсхема X, то есть $K[X_i]$ это главная локализация $K[X]$. Далее в этой главе $B = K[X]$, и $x \in X(B \otimes R)$ обозначает образ общего элемента X под действием естественного гомоморфизма $X(B) \to G(B) \to G(B \otimes R)$.

Лемма 59. *Пусть* X *— представимый подфунктор* G*, и* R *—* K*-алгебра. Тогда*

$$\mathrm{Tran}^w_G(X, Y)(R) = \{a \in G(R) \mid w(x, a) \in Y(B \otimes R)\}.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{R}$ — R-алгебра, $z \in X(\tilde{R})$ и a принадлежит правой части в формуле выше. Применяя $z \otimes \mathrm{id}_R$ к вложению $w(x, a) \in Y(B \otimes R)$, мы получим $w(z, a) \in Y(\tilde{R} \otimes R)$. Посылая этот элемент в $Y(\tilde{R})$ с гомоморфизмом умножения $\tilde{R} \otimes R \to \tilde{R}$, мы видим, что $a \in \mathrm{Tran}^w_G(X, Y)(R)$. Таким образом, мы доказали, что правая часть содержится в транспортере. Обратная импликация тривиальна. □

Теорема 60. *Предположим, что* X *локально-свободная* K*-схема и* Y *замкнутая под-*

схема G*. Тогда* $\mathrm{Tran}_G^w(X,Y)$ *это замкнутая подсхема.*

Доказательство. Отождествим общий элемент g схемы G с его каноническим образом в $G(B\otimes A)$. Рассмотрим открытое покрытие $\operatorname{Spec} B_{s_i}$ схемы X такое, что каждое B_{s_i} это свободный K-модуль и обозначим через h_i канонический образ $w(g,x)$ в $G(B_{s_i}\otimes A)$. Таким образом, $h_i\colon A\to B_{s_i}\otimes A$ рассматривается как отображение. Другими словами, h_i это композиция отображения $w(g,x)\colon A\to B\otimes A$ с локализационным гомоморфизмом λ_{s_i}. Базис K-модуля B_{s_i} определяет изоморфизм A-модулей $B_{s_i}\otimes A\cong\prod\limits_{j\in J_i}A$. Обозначим через $h_{ij}\colon A\to A$ композицию h_i с проекцией в j-ю компоненту прямого произведения из формулы выше. Как обычно, $I(Y)$ обозначает идеал в A, который определяет подсхему Y. Пусть $\mathfrak{q}$ — идеал, порожденный всеми образами $I(Y)$ под действием отображений h_{ij}.

Пусть $a\in G(R)$. По лемме 59, $a\in\mathrm{Tran}_G^w(X,Y)(R)$, в то время как $w(x,a)\in Y(B\otimes R)$. Так как $\operatorname{Spec} B_{s_i}$ это открытое покрытие X, это включение эквивалентно включению $v_i\in Y(B_{s_i}\otimes R)$, где v_i это канонический образ $w(x,a)$ в $G(B_{s_i}\otimes R)$. Заметим, что v_i (как отображение) это композиция

$$(\lambda_{s_i}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes a)\circ w(x,g)=(\mathrm{id}\otimes a)\circ(\lambda_{s_i}\otimes\mathrm{id})\circ w(x,g)=(\mathrm{id}\otimes a)\circ h_i.$$

Включение $v_i\in Y(B_{s_i}\otimes R)$ эквивалентно

$$v_i\Big(I(Y)\Big)=0\iff\Big(\mathrm{id}\otimes a\Big)\Big(h_i\Big(I(Y)\Big)\Big)=0\iff a\Big(h_{ij}\Big(I(Y)\Big)\Big)=0$$

для всех $j\in J_i$. Таким образом, $a\in\mathrm{Tran}_G^w(X,Y)(R)$ и $a(\mathfrak{q})=0$, а это значит, что $\mathrm{Tran}_G^w(X,Y)$ это замкнутая подсхема G, определенная идеалом $\mathfrak{q}$. $\square$

Далее мы доказываем, что при некоторых естественных условиях теоретико-групповые и теоретико-схемные нормализаторы совпадают. Пусть Z функция из класса колец в класс множеств такая, что $Z(R)$ это подмножество $G(R)$. Так как пересечение замкнутых подсхем G это замкнутая подсхема, то существует наименьшая подсхема $\overline{Z}$ в G, содержащая Z (то есть $\overline{Z}(R)\supseteq Z(R)$ для всех колец R). Эта подсхема называется замыканием Z в G. Другими словами $\overline{Z}$ это замкнутая подсхема, определенная пересечением ядер z над всеми $z\in Z(R)$ и всех K-алгебр R. Функция Z называется плотной в G, если $\overline{Z}=G$. Если X — подфунктор G и R — K-алгебра, тогда под замыканием $X(R)$ в G мы подразумеваем замыкание функции, которая равна $X(R)$ в R и пустому множеству в остальных случаях.

Утверждение 61. *Пусть* X *— представимый функтор* G*, и пусть* Y *— замкнутая подсхема* G*. Если* $X(R)=X_R(R)$ *— плотен в* X_R*, тогда*

$$\mathrm{Tran}_{G(R)}^w\Big(X(R),Y(R)\Big)=\mathrm{Tran}_G^w(X,Y)(R).$$

Доказательство. Пусть $h\in G(R)$. По Лемме 59, $h\in\mathrm{Tran}_G^w(X,Y)(R)$, в то время как

$w(x,h) \in Y(B \otimes R)$. Пусть $u = w(x,h)\colon A \to B \otimes R$. Если $\mathfrak{q} = I(Y)$, тогда включение $u \in Y(B \otimes R)$ эквивалентно $u(\mathfrak{q}) = 0$. С другой стороны,

$$h \in \mathrm{Tran}^{w}_{G(R)}\Big(X(R), Y(R)\Big) \iff w(a,h) \in Y(R) \ \text{ для всех } a \in X(R) \iff$$
$$w(a,h)(\mathfrak{q}) = 0 \ \text{ для всех } a \in X(R) \iff (a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}) \circ u(\mathfrak{q}) = 0 \ \text{ для всех } a \in X(R),$$

где $a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}$ это композиция $B \otimes R \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{mult}} R$. Замыкание $X_R(R)$ в X_R эквивалентно $V(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ это пересечение ядер гомоморфизмов R-алгебр $\hat{a}\colon B \otimes R \to R$ над всеми $\hat{a} \in X_R(R)$. Гомоморфизмы R-алгебр $\hat{a}\colon B \otimes R \to R$ находятся в биективном соответствии с гомоморфизмами K-алгебр $a\colon B \to R$, а именно, $\hat{a} = a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}$. Таким образом, $X_R(R)$ плотно в X_R тогда и только тогда, когда пересечение ядер гомоморфизмов $a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}$ над всеми $a \in X(R)$ тривиально. Из этого следует, что $u(\mathfrak{q}) = 0$ тогда и только тогда, когда $(a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}) \circ u(\mathfrak{q}) = 0$ для всех $a \in X(R)$, что заканчивает доказательство. □

4.4. **Вычисление нормализатора.** Пусть H — замкнутая K-подгруппа G. Предположим, что сама H является групповой схемой Шевалле–Демазюра с приведенной неприводимой системой корней Ψ и обозначим через D функтор ее элементарной подгруппы. Также предположим, что $D(R)$ совершенна для всех K-алгебр R, что равносильно тому, что $\Psi \neq A_1$ и либо $\Psi \neq C_2$, либо в K нет эпиморфизмов в поле из 2 элементов. Пусть R — K-алгебра. Для функтора X на категории K-алгебр обозначим через X_R его ограничение в категорию R-алгебр (конечно, H_R и G_R — аффинные групповые схемы над R).

Пусть $N(R)$ — нормализатор $D(R)$ в $G(R)$, и пусть $\tilde{N}(R)$ — нормализатор $H(R)$ в $G(R)$. Положим $\mathrm{Tran}(R) = \mathrm{Tran}_{G(R)}(D(R), H(R))$. Очевидно, что оба нормализатора $N(R)$ и $\tilde{N}(R)$ содержатся в $\mathrm{Tran}(R)$.

Лемма 62. $N(R) = \mathrm{Tran}(R) \geq \tilde{N}(R)$.

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{Tran}(R)$ и пусть R' — конечно-порожденная $\mathbb{Z}$-подалгебра R. Тогда $D(R')^h \leq H(R'')$ для некоторой конечно-порожденной $\mathbb{Z}$-подалгебры $R'' \supseteq R'$ в R. По главной теореме в работе [60], $H(R'')/D(R'')$ разрешима, следовательно $D(R'')$ — наибольшая совершенная подгруппа $H(R'')$. Так как $D(R')^h \leq H(R'')$ и $D(R')^h$ совершенна, то она содержится в $D(R'') \leq D(R)$. Любое кольцо R является прямой суммой конечно-порожденных $\mathbb{Z}$-подалгебр, следовательно, $D(R)^h \leq D(R)$, то есть $h \in N(R)$. □

В следующем следствии мы рассматриваем схемно-теоретические нормализаторы. Для подфунктора X в G положим $N_G(X) = \mathrm{Tran}_G(X, X)$.

Следствие 63. *Оба нормализатора* $N_G(D)$ *и* $N_G(H)$ *замкнуты в* G.

Доказательство. Пусть X_α, $\alpha \in \Psi$ — корневые подгруппы H, соответствующие выбранному расщепимому максимальному тору. Заметим, что по Лемме 62, $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H)$.

Тогда $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H) = \cap_{\alpha\in\Psi} \mathrm{Tran}_G(X_\alpha, H)$. Так как H — замкнутая подсхема и $K[X_\alpha] = K[t]$ — свободный K-модуль, предположение о $N_G(D)$ следует из Теоремы 60.

Разложение Гаусса в расщепимой редуктивной группе утверждает, что существует открытое покрытие H такое, что каждая карта изоморфна (как схема) $U \times U \times T$, где U — унипотентный радикал Борелевской подгруппы и T — расщепимый тор. Таким образом, H — локально свободная, и результат снова следует из Теоремы 60. $\square$

Лемма 64. $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H) = N_G(H)$.

Доказательство. Включение $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H) \geq N_G(H)$ немедленно следует из Леммы 62 и определения схемно-теоретических транспортеров. Обратно, пусть R — K-алгебра и $h \in N_G(D)(R) = \mathrm{Tran}_G(D, H)(R)$. Рассмотрим функтор D^h_R на категории R-алгебр, заданный по правилу $D^h_R(R') = D(R')^h$ с очевидным действием на морфизмах (мы все еще отождествляем h с его образами в $G(R')$ под действием структурного гомоморфизма $R \to R'$).

Очевидно, что $D^h_R \leq H_R$, следовательно, замыкание $\overline{D^h_R}$ функтора D^h_R в G_R также содержится в H_R. Сопряжение при помощи h это схемный автоморфизм G_R, поэтому $\overline{D^h_R} = (\overline{D_R})^h$. Так как замыкание элементарной подгруппы является всей группой Шевалле, то $\overline{D_R} = H_R$. Тогда $(H_R)^h \leq H_R$, что значит $h \in N_G(H)(R)$. $\square$

Следующее утверждение это проверка условия плотности в Утверждении 61 и установление равенства теоретико-групповых и теоретико-кольцевых нормализаторов.

Лемма 65. *Предположим, что* R *— алгебра над бесконечным полем* K*. Тогда* $\mathbb{G}_a(R)$ *— плотна в* $\mathbb{G}_{a,R}$*.*

Доказательство. Гомоморфизм R-алгебр $R[\mathbb{G}_a] = R[t] \to R$ является гомоморфизмом эвалюации. Многочлен $p \in R[t]$ лежит в пересечении ядер всех таких гомоморфизмов всегда, когда $p(r) = 0$ для всех $r \in R$. В частности, $p(r_i) = 0$, $i = 0, \ldots, \deg p$, для $\deg P + 1$ различных элементов K. Так как определитель Вандермонда ненулевой, все коэффициенты p должны быть равны нулю. Поэтому, пересечение ядер всех гомоморфзимов R-алгебр $R[\mathbb{G}_a] \to R$ тривиально. Следовательно, замыкание $G_a(R)$ суть $G_{a,R}$. $\square$

Утверждение 66. *Если* K *— бесконечное поле, тогда*

$$N_G(D)(R) = \mathrm{Tran}_G(D, H)(R) = N_G(H)(R) = N(R) = \tilde{N}(R) = \mathrm{Tran}(R).$$

Доказательство. Группа $D(R)$ порождена корневыми подгруппами $X_\alpha(R)$, $\alpha \in \Psi$, следовательно

$$\mathrm{Tran}(R) = \bigcap_{\alpha\in\Psi} \mathrm{Tran}_{G(R)}\Big(X_\alpha(R), H(R)\Big) \text{ и } \mathrm{Tran}_G(D, H)(R) = \bigcap_{\alpha\in\Psi} \mathrm{Tran}_G\Big(X_\alpha, H\Big)(R).$$

Так как $X_\alpha \cong \mathbb{G}_a$, по Утверждению 61 и Лемме 65

$$\mathrm{Tran}_{G(R)}\Big(X_\alpha(R), H(R)\Big) = \mathrm{Tran}_G\Big(X_\alpha, H\Big)(R), \text{ тогда } \mathrm{Tran}(R) = \mathrm{Tran}_G(D, H)(R).$$

Следовательно, мы получаем следующую цепочку включений

$$\tilde{N}(R) \leq \mathrm{Tran}(R) = \mathrm{Tran}_G(D, H)(R) = \mathrm{Tran}_G(H, H)(R) \leq \mathrm{Tran}_{G(R)}\Big(H(R), H(R)\Big) = \tilde{N}(R).$$

Таким образом, $\tilde{N}(R) = \mathrm{Tran}(R)$ и все другие равенства уже доказаны в Леммах 62 и 64. □

4.5. **Равенство транспортеров и нормализаторов.** Этот раздел посвящен доказательству Условия 5 в обозначениях §§4.3–4.4.

Теорема 67. *Пусть* K *— бесконечное поле характеристики не 2, если* $\Psi = A_2, B_l, C_l, F_4, G_2$ *и не 3, если* $\Phi = G_2$. *Предположим далее, что существует абсолютно неприводимое представление* H *в* G, *то есть линейное представление* G *такое, что* K*-подмодули* $KD(K)$ *и* $KG(K)$ *матричного кольца* $M_n(K)$ *равны. Тогда* $\mathrm{Tran}(D, N) = N$.

Доказательство. Условие существования представления гарантирует, что централизатор D в G равен центру G и центру D. Для K-алгебры R обозначим через $D_{\mathrm{ad}}(R)$ фактор-группу $D(R)$ по ее центру. Известно, что центр $D(R)$ совпадает с (схемно-теоретическим) центром H, следовательно, $D_{\mathrm{ad}}(R)$ это элементарная подгруппа присоединенной группы Шевалле типа Ψ.

Пусть $a \in \mathrm{Tran}(D, N)(R)$. Положим $C = R[H]$, и пусть $h \in H(C) \subseteq G(C)$ — общий элемент H_R. По Лемме 59, $h^a \in N(C)$ (как обычно, мы отождествляем a с его каноническим образом в $G(C)$). Рассмотрим отображение $\theta\colon N(C) \to \mathrm{Aut}(D(C))$, где $N(C)$ действует на $D(C)$ сопряжением. Так как $\theta(b)$ действует тождественно на центре $D(C)$, мы можем рассматривать θ как автоморфизм $D_{\mathrm{ad}}(C)$.

По классификации автоморфизмов присоединенной элементарной группы Шевалле [41, Theorem 1], $\theta(h^a) = \theta(b) \cdot \gamma \cdot \varphi$, где $b \in H_{\mathrm{ad}}(C)$, γ — графовый автоморфизм и φ индуцирован кольцевым автоморфизмом. Тогда $\varphi = \gamma^{-1}\theta(b^{-1}h^a)$ — автоморфизм групповой схемы H_C. Будучи индуцированным кольцевым автоморфизмом $\psi\colon C \to C$, φ действует на корневой подгруппе X_α посылая $x_\alpha(r)$ в $x_\alpha(\psi(r))$. Так как φ это схемный автоморфизм, то ψ индуцирует автоморфизм схемы $\mathbb{G}_{a,C}$. Но схемный автоморфизм $\mathbb{G}_{a,C}$, сохраняющий элемент 1, тождественный. Таким образом, ψ и φ также тождественны.

Таким образом, $\theta(b^{-1}h^a) = \gamma$. Коединица $\varepsilon\colon C \to R$ отображает h в тождественный элемент $H(R)$ (это эквивалентно определению коединицы). Обе части уравнения $\theta(b^{-1}h^a) =$

γ являются естественными преобразованиями $D_{ad} \to D_{ad}$, таким образом, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} D_{ad}(C) & \xrightarrow{\varepsilon} & D_{ad}(R) \\ {\scriptstyle \gamma=\theta(b^{-1}h^a)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma=\theta_R(\varepsilon(b)^{-1})} \\ D_{ad}(C) & \xrightarrow{\varepsilon} & D_{ad}(R) \end{array}$$

коммутативна, где $\theta_R \colon N(R) \to \mathrm{Aut}\Big(D_{ad}(R)\Big)$ обозначает сопряжение при помощи аргумента θ_R. Из этого следует, что $\theta(\varepsilon(b))\gamma$ действует тривиально на $D_{ad}(R)$. Это значит, что γ индуцированно внутренним автоморфизмом системы корней Ψ и может быть заменено сопряжением при помощи подходящего из группы Вейля. Умножив b на этот элемент мы можем предполагать, что γ тривиален.

Теперь, $\theta(h^a) = \theta(b)$. Это значит, что $b^{-1}h^a$ действует тривиально на $D_{ad}(C)$, следовательно также и на $D(C)$. Из этого следует, что $h^a = bc$ для некоторого элемента c из центра $G(C)$. Пусть R' — R-алгебра. Посылая h в каждый элемент из $D(R')$, мы получаем $D(R')^a \leq D(R') \cdot \mathrm{Cent}(G(R'))$. Наконец,

$$D(R')^a = [D(R')^a, D(R')^a] \leq [D(R') \cdot \mathrm{Cent}(G(R')),\ D(R') \cdot \mathrm{Cent}(G(R'))] \leq D(R').$$

Таким образом, $a \in N(R)$. $\square$

4.6. **Надгруппы внешнего квадрата элементарных групп.** В оставшейся части работы мы опишем надгруппы внешнего квадрата элементарной группы. Напомним, что для $\bigwedge^2 E_n(R)$ сеть $\mathbb{A}$ состоит из двух идеалов A_0 и A_1. При этом они равны в случае $n \geqslant 6$, либо $n \geqslant 4$ и дополнительного требования $3 \in R^*$. Далее мы будем придерживаться этих ограничений. Для описания надгрупп воспользуемся развитой теорий для интересующего нас случая. В ее обозначениях $G(\Phi, R) = GL_N(R), D(R) = \bigwedge^2 E_n(R)$. Мы изучаем решетку подгрупп $\mathcal{L} = L\Big(\bigwedge^2 E_n(R), GL_N(R)\Big)$.

Заметим, что для внешних квадратов большинство условий в теореме 58 тривиальны или хорошо известны, за исключением следующих.

- Нормализатор $N(\_)$ является замкнутой подсхемой в $GL_N(\_)$ и для любого поля F $N(F) = N\Big(\bigwedge^2 E_n(F)\Big)$ "почти максимальный" в $GL_N(F)$.
- Транспортер $\bigwedge^2 E_n(R)$ в $N\Big(\bigwedge^2 E_n(R)\Big)$ равен $N\Big(\bigwedge^2 E_n(R)\Big)$ для любой K-алгебры R.
- Извлечь нетривиальный элементарный корневой унипотент из подгруппы, порожденной общим элементом GL_N и $\bigwedge^2 E_n$.

Однако, в §4.4 мы уже доказали, что если R — алгебра над бесконечным полем, тогда $N\Big(\bigwedge^2 E_n(R)\Big) = \mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^2 E_n(R), \bigwedge^2 SL_n(R)\Big)$. А по Следствию 40, $\mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^2 E_n(R), N\Big(\bigwedge^2 E_n(R)\Big)\Big) = N\Big(\bigwedge^2 E_n(R)\Big)$. Более того, в §2.4 мы доказали, что указанные нормализаторы и транспортеры равны $\bigwedge^2 GL_n(R)$ для произвольного коммутативного кольца и четного n. Таким образом, второй пункт выполнен.

В §4.3 мы показали, что транспортер $\mathrm{Tran}\left(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(R)\right)$ замкнут, так как $\bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(\_)$ это замкнутая подсхема. Действительно, $\bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(R) = \bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{SL}_N(R)$ для любого коммутативного кольца R, а $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ задается уравнениями через инвариантные формы или через идеал Плюккера. Таким образом, $N(\_)$ замкнут.

Брюс Куперстейн в своей работе [45] доказал, что для конечных полей нормализатор $N\left(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(F)\right)$ максимален, а для алгебраически замкнутых полей это утверждение следует из Теоремы Чжоу [44]. Для бесконечных полей максимальность можно вывести из работ Франца Тиммесфельда, посвященных классификации подгрупп, порожденных квадратичными унипотентными группами [93].

Таким образом, нам остается только извлечь нетривиальную трансвекцию из промежуточной подгруппы, порожденной общим элементом g группы $\mathrm{GL}_N(R)$ и группой $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$. Далее, если обозначение индексов $I, J \in \bigwedge^2[n]$ в элементарной трансвекции $t_{I,J}(\xi)$ будет неоднозначно, мы будем использовать уточненное обозначение $t_{i_1,i_2;j_1,j_2}(\xi)$. Пусть

$$g := t_{23;12}(\xi_1) t_{34;12}(\xi_2) \dots t_{n-2,n-1;12}(\xi_{n-3}) t_{n-1,n;12}(\xi_{n-2}),$$

то есть g равна матрице, которая отличается от единичной только в $(n-2)$ позиций в первом столбце.

Схема извлечения состоит в следующем. Для внешнего квадрата в §3.1 мы построили трансвекцию $T_{*,j}(w) = \prod\limits_{s \neq j} \bigwedge^2 t_{s,j}(\mathrm{sgn}(s,j) w_{sj})$, которая стабилизирует произвольный столбец матрицы из $\mathrm{GL}_N(R)$. Теперь, используя подходящие нетривиальные $T_{*,j}$, стабилизировать первые $n-2$ столбца матрицы g. Таким образом, полученная матрица принадлежит параболической подгруппе P_{1k}, где $k = n-1$. Далее, рассмотреть коммутатор полученной матрицы с внешней трансвекцией из унипотентного радикала U_{1k} указанной параболической P_{1k}. Таким образом, этот коммутатор будет принадлежать радикалу U_{1k}. В случае, если коммутатор не есть элементарная трансвекция, необходимо рассмотреть еще несколько других коммутаторов с подходящими внешними трансвекциями из U_{1k}.

Лемма 68. *Пусть* $h := t_{23;1l}(\xi_1) \dots t_{n-1,n;1l}(\xi_{n-2}) \in \bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$, *где* $2 \leqslant l \leqslant n-1$. *Тогда*

$$[h, T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] = t_{23;1,l+1}(-\xi_1 \xi_{l-1}) \dots t_{n-1,n;1,l+1}(-\xi_{n-2} \xi_{l-1}).$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по размерности группы n. Если $n = 4$, тогда

$$[h, T_{*,3}(h'_{*,12})] = [h, t_{12,13}(-\xi_1) t_{24,34}(-\xi_1) t_{24,23}(\xi_2)] = t_{23;13}(-\xi_1^2) t_{34;13}(-\xi_2 \xi_1) \text{ при } l = 2;$$
$$[h, T_{*,4}(h'_{*,13})] = [h, t_{13,14}(-\xi_2)] = t_{23;14}(-\xi_1 \xi_2) t_{34;14}(-\xi_2^2) \text{ при } l = 3.$$

Пусть теперь $h = t_{23;1l}(\xi_1)\dots t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}) \in \bigwedge^2 E_{n+1}(R)$. Тогда

$$[h, T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] =: [z \cdot t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), T_{*,l+1}(h'_{*,1l})],$$

где $z = t_{23;1l}(\xi_1)\dots t_{n-1,n;1l}(\xi_{n-2})$. Воспользовавшись формулой $[ab, c] = {}^a[b, c] \cdot [a, c]$, получим

$${}^z[t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] \cdot [z, T_{*,l+1}(h'_{*,1l})].$$

Второй коммутатор равен $t_{23;1,l+1}(-\xi_1\xi_{l-1})\dots t_{n-1,n;1,l+1}(-\xi_{n-2}\xi_{l-1})$ по индукционному предположению.

Далее заметим, что $T_{*,l+1}(h'_{*,1l}) = \bigwedge^2 t_{l,l+1}(h'_{l,l+1;1l})\bigwedge^2 t_{l+2,l+1}(-h'_{l+1,l+2;1l})$ для $2 \leqslant l \leqslant n-1$ и $T_{*,n+1}(h'_{*,1n}) = \bigwedge^2 t_{n,n+1}(h'_{n,n+1;1n})$ для $l = n$. Но $\bigwedge^2 t_{l+2,l+1}(-h'_{l+1,l+2;1l})$ коммутирует с $t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1})$. Таким образом,

$$[t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] = [t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), \textstyle\bigwedge^2 t_{l,l+1}(h'_{l,l+1;1l})]$$

для любого $2 \leqslant l \leqslant n$. Тогда

$$[t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), \textstyle\bigwedge^2 t_{l,l+1}(h'_{l,l+1;1l})] = [t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), t_{1l;1,l+1}(-\xi_{l-1})] = t_{n,n+1;1,l+1}(-\xi_{n-1}\xi_{l-1}).$$

Для окончания доказательства осталось заметить, что матрица z коммутирует с полученной трансвекцией. □

Утверждение 69. *В подгруппе* H*, порожденной* g *и* $\bigwedge^2 E_n(K[GL_N])$*, существует нетривиальная матрица из* P_{1k}*.*

Доказательство. Пусть $g = t_{23;12}(\xi_1)\dots t_{n-1,n;12}(\xi_{n-2}) \in H \leqslant GL_N(R)$. Тогда используя Лемму 68, получим

$$[g, T_{*,3}(g'_{*,12}), T_{*,4}(g'_{*,13}), \dots, T_{*,n}(g'_{*,1k})] = t_{23;1n}(p_1)\dots t_{n-1,n;1n}(p_{n-2}) \in H,$$

где $p_1, \dots, p_{n-2} \in \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_{n-2}]$ — одночлены с коэффициентами ±1. Таким образом, мы получили нетривиальную матрицу из P_{1k}. □

Утверждение 70. *Если в подгруппе* H *существует нетривиальная матрица из* P_{1k}*, тогда в ней существует нетривиальная элементарная трансвекция.*

Доказательство. Пусть $h := t_{23;1n}(p_1)\dots t_{n-1,n;1n}(p_{n-2}) \in P_{1k}$ — матрица, полученная в предыдущем утверждении. Рассмотрим коммутатор h с внешней трансвекцией $\bigwedge^2 t_{1,n}(\zeta) \in U_{1k}$. Тогда

$$[h, \textstyle\bigwedge^2 t_{1,n}(\zeta)] = [t_{n-1,n;1n}(p_{n-2}), t_{1,n-1;n-1,n}(-\zeta)] = t_{1,n-1;1n}(-\zeta p_{n-2}) \in U_{1k},$$

где $-\zeta p_{n-2}$ это одночлен вида $\pm\zeta\xi_1^{r_1}\dots\xi_{n-2}^{r_{n-2}}$. □

Следовательно, третий пункт тоже выполнен, и мы можем применить Теорему 58, чтобы заключить, что решетка подгрупп $\mathcal{L} = \mathrm{L}\Big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R), \mathrm{GL}_N(R)\Big)$ стандартна.

Резюмируя, мы видим что для внешнего квадрата элементарной группы выполнено стандартное описание надгрупп.

Теорема 71. *Пусть* R — *коммутативное кольцо с* 1 *и обратимой* 2. *Пусть также* $n \geqslant 6$, *либо* $n \geqslant 4$ *и* $3 \in R^*$. *Тогда для любой надгруппы* H *внешнего квадрата элементарной группы* $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$ *существует единственный наибольший идеал* A *кольца* R *такой, что*

$$\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, A) \leqslant H \leqslant N_{\mathrm{GL}_N(R)}\Big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, A)\Big).$$

При этом Теорема 16 дает альтернативное описание нормализатора, а именно, он равен соответствующей конгруэнц-подгруппе уровня A:

$$N_{\mathrm{GL}_N(R)}\Big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, A)\Big) = \rho_A^{-1}\left(\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R/A)\right).$$

Заключение

Приведем список основных результатов настоящей работы, которые выносятся на защиту.

(1) **Теоремы 27 и 38** описывают внешнюю степень полной линейной группы над произвольными кольцами через стабилизаторы одной или нескольких инвариантных форм. Таким образом схему $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ можно рассматривать с нескольких точек зрения. Либо как стабилизатор идеала Плюккера (ранее известный способ), либо использовать инвариантные формы или выведенные из них уравнения.

(2) В **Теореме 43** доказано стандартное разложение унипотентов для внешних степеней полной линейной группы, в то время для внешних квадратов в **Теореме 53** также доказана одна из вариаций этого метода — “обратное разложение унипотентов”.

(3) **Теорема 58** показывает, что при определенных условиях на группу Шевалле G и ее подгруппу D решетка подгрупп $L\Big(D(R), G(R)\Big)$ стандартна для коммутативных колец R.

(4) **Теорема 71** утверждает, что при некоторых предположениях на размерность группы выполнено стандартное описание надгрупп для внешнего квадрата элементарной группы.

Дальнейшее возможное направление исследований автор видит следующим образом. Применить развитую технику для других неприводимых представлений элементарной группы, например, симметрической степени. А также применить новый метод описания надгрупп для тензорных степеней и тензорных произведений элементарных групп.

Список литературы

1. *Ананьевкий А. С.*, *Вавилов Н. А.*, *Синчук С. С.* О надгруппах $E(m, R) \otimes E(n, R)$. I. Уровки и нормализаторы // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23, № 5. С. 55—98.
2. *Ананьевкий А. С.*, *Вавилов Н. А.*, *Синчук С. С.* Об описании надгрупп $E(m, R) \otimes E(n, R)$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 365. С. 5—28.
3. *Боревич З. И.*, *Вавилов Н. А.* О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 777—778.
4. *Боревич З. И.*, *Вавилов Н. А.* Об определении сетевой подгруппы // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 132. С. 26—33.
5. *Боревич З. И.*, *Вавилов Н. А.* Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // Тр. МИАН. 1984. Т. 165. С. 24—42.
6. *Борель А.* Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам, Мир, М. 1973. С. 9—59.
7. *Вавилов Н. А.* О подгруппах расщепимых классических групп // Тр. МИАН. 1990. Т. 183. С. 29—42.
8. *Вавилов Н. А.* О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29, № 4. С. 31—43.
9. *Вавилов Н. А.* О подгруппах симплектической группы, содержащих subsystem subgroup // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2007. Т. 349. С. 5—29.
10. *Вавилов Н. А.* Подгруппы расщепимых классических групп. ЛГУ, Ленинград: Докторская диссертация, 1987. С. 334.
11. *Вавилов Н. А.* Подгруппы расщепимых ортогональных групп над коммутативным кольцом // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 281. С. 35—59.
12. *Вавилов Н. А.* Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 6. С. 1300—1303.
13. *Вавилов Н. А.*, *Казакевич В. Г.* Еще несколько вариаций на тему разложения трансвекций // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2010. Т. 375. С. 32—47.
14. *Вавилов Н. А.*, *Лузгарев А. Ю.* Нормализатор группы Шевалле типа E_6 // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 5. С. 37—64.
15. *Вавилов Н. А.*, *Лузгарев А. Ю.* Нормализатор группы Шевалле типа E_7 // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 6. С. 57—88.
16. *Вавилов Н. А.*, *Перельман Е. Я.* Поливекторные представления GL_n // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2006. Т. 338. С. 69—97.

17. *Вавилов Н. А.*, *Петров В. А.* О надгруппах $EO(2l, R)$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 272. С. 68—85.

18. *Вавилов Н. А.*, *Петров В. А.* О надгруппах $EO(n, R)$ // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 2. С. 10—51.

19. *Вавилов Н. А.*, *Петров В. А.* О надгруппах $Ep(2l, R)$ // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 4. С. 72—114.

20. *Вавилов Н. А.*, *Степанов А. В.* Надгруппы полупростых групп // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2008. № 3. С. 51—95.

21. *Васерштейн Л. Н.*, *Суслин А. А.* Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 5. С. 993—1054.

22. *Гвоздевский П. Б.* Надгруппы подгрупп Леви I. Случай абелева унипотентного радикала // Алгебра и анализ. 2019. Т. 31, № 6. С. 79—121.

23. *Лузгарев А. Ю.* Надгруппы исключительных групп. СПбГУ, Санкт-Петербург, 2008. Канд. диссертация.

24. *Лузгарев А. Ю.* О надгруппах $E(E_6, R)$ и $E(E_7, R)$ в минимальных представлениях // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 319. С. 216—243.

25. *Лузгарев А. Ю.* Описание надгрупп F_4 в E_6 над коммутативным кольцом // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 6. С. 148—185.

26. *Нужин Я. Н.* Группы, лежащие между группами Шевалле типа B_l, C_l, F_4, G_2 над несовершенными полями характеристики 2 и 3 // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 157—162.

27. *Нужин Я. Н.* О группах, заключенных между группами лиева типа над различными полями // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 526—541.

28. *Нужин Я. Н.*, *Якушевич А. В.* Промежуточные подгруппы групп Шевалле над полем частных кольца главных идеалов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 347—358.

29. *Петров В.*, *Ставрова А.* Элементарные подгруппы в изотропных редуктивных группах // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 160—188.

30. *Петров В. А.* Надгруппы классических групп. СПбГУ, Санкт-Петербург, 2005. С. 129.

31. *Петров В. А.* Разложение трансвекций: алгебро-геометрический подход // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 150—157.

32. *Степанов А. В.* Новый взгляд на разложение унипотентов и нормальное строение групп Шевалле // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 3. С. 161—173.

33. *Суслин А. А.* О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 2. С. 235—252.

34. *Хамфри Д.* Линейные алгебраические группы. Москва: Наука, 1980.

35. *Щеголев А. В.* Надгруппы элементарной блочно-диагональной подгруппы классической симплектической группы над произвольным коммутативным кольцом // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 6. С. 147—199.

36. *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.

37. *Aschbacher M.* Finite simple groups and their subgroups // Tuan HF. Gr. Theory, Beijing 1984. Leture Notes Math., Springer, Berlin, vol. 1185. 1986. P. 1–57.

38. *Bak A.*, *Hazrat R.*, *Vavilov N.* Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent // J. Pure Appl. Algebr. 2009. Vol. 213, no. 6. P. 1075–1085.

39. *Bak A.* Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability // K-Theory. 1991. Vol. 4, no. 4. P. 363–397.

40. *Bermudez H.* Linear Preserver Problems and Cohomological Invariants: PhD thesis / Bermudez Hernando. Emory University, 2014. P. 107.

41. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebr. 2012. Vol. 355, no. 1. P. 154–170.

42. *Burness T. C.*, *Testerman D. M.* Irreducible Subgroups of Simple Algebraic Groups – A Survey // Groups St Andrews 2017 Birmingham. Cambridge University Press, 2019. P. 230–260.

43. *Chevalley C.* Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques, I, II. Ecole Norm. Sup., Paris, 1958.

44. *Chow W.-L.* On the Geometry of Algebraic Homogeneous Spaces // Ann. Math. 1949. Vol. 50, no. 1. P. 32–67.

45. *Cooperstein B. N.* Nearly maximal representations for the special linear group. // Michigan Math. J. 1980. Vol. 27, no. 1. P. 3–19.

46. *Demazure M.*, *Gabriel P.* Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups. Vol. 39. Amsterdam: Elsevier, 1980. P. 356. (North-Holland Mathematics Studies).

47. *Dieudonné J. A.*, *Carrell J. B.* Invariant theory, old and new // Adv. Math. (N. Y). 1970. Vol. 4, no. 1. P. 1–80.

48. *Dixon J. D.* Rigid Embedding of Simple Groups in the General Linear Group // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 384–391.

49. *Đoković D. Ž.*, *Platonov V. P.* Algebraic groups and linear preserver problems // C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A. 1993. Vol. 317, no. 10. P. 925–930.

50. *Đoković D. Ž.*, *Li C.-K.* Overgroups of some classical linear groups with applications to linear preserver problems // Linear Algebra Appl. 1994. Vol. 197/198. P. 31–61.

51. *Dye R. H.* Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic two // J. Algebr. 1979. Vol. 59, no. 1. P. 202–221.

52. *Dye R. H.* Maximal subgroups of $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, $\mathrm{SL}_{2n}(K)$, $\mathrm{PGL}_{2n}(K)$ and $\mathrm{PSL}_{2n}(K)$ associated with symplectic polarities // J. Algebr. 1980. Vol. 66, no. 1. P. 1–11.

53. *Dye R. H.* On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two // Math. Zeitschrift. 1980. Vol. 172, no. 3. P. 203–212.

54. *Garibaldi S.*, *Guralnick R. M.* Simple groups stabilizing polynomials // Forum Math. Pi. 2015. Vol. 3, e3. P. 1–41.

55. *Guralnick R. M.* Invertible preservers and algebraic groups // Linear Algebra Appl. 1994. Vol. 212/213. P. 249–257.

56. *Guralnick R. M.* Invertible Preservers and Algebraic Groups II: Preservers of Similarity Invariants and Overgroups of $\mathrm{PSL}_n(F)$ // Linear Multilinear Algebr. 1997. Vol. 43, no. 1–3. P. 221–255.

57. *Guralnick R. M.* Monodromy Groups of Coverings of Curves // Galois Groups Fundam. Groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2003. Vol. 41. P. 1–46.

58. *Guralnick R. M.*, *Li C.-K.* Invertible preservers and algebraic groups III: preservers of unitary similarity (congruence) invariants and overgroups of some unitary subgroups // Linear Multilinear Algebr. 1997. Vol. 43, no. 1–3. P. 257–282.

59. *Guralnick R. M.*, *Tiep P. H.* Low-Dimensional Representations of Special Linear Groups in Cross Characteristics // Proc. London Math. Soc. 1999. Vol. 78, no. 1. P. 116–138.

60. *Hazrat R.*, *Vavilov N.* K_1 of Chevalley groups are nilpotent // J. Pure Appl. Algebr. 2003. Vol. 179, no. 1/2. P. 99–116.

61. *Hazrat R.*, *Vavilov N.*, *Zhang Z.* Relative commutator calculus in Chevalley groups // J. Algebr. 2013. Vol. 385. P. 262–293.

62. *Jantzen J. C.* Representations of algebraic groups, 2nd ed. Vol. 107. AMS, 2003. P. 576. (Mathematical surveys and monographs).

63. *King O.* On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group // J. Algebr. 1985. Vol. 96, no. 1. P. 178–193.

64. *King O.* On subgroups of the special linear group containing the special unitary group // Geom. Dedicata. 1985. Vol. 19, no. 3. P. 297–310.

65. *King O.* Subgroups of the special linear group containing the diagonal subgroup // J. Algebr. 1990. Vol. 132, no. 1. P. 198–204.

66. *Kleidman P. B.*, *Liebeck M. W.* The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups. Vol. 129. Cambridge University Press, 1990. P. x+303.

67. *Knus M.-A.* Quadratic and Hermitian Forms over Rings. Vol. 294. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).

68. *Li S. Z.* $\mathrm{SL}(n, K)_L \otimes \mathrm{SL}(m, K)_R$ over a skewfield K. 1997.

69. *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(n, F)$ of a classical group over a subfield of F // Algebr. Colloq. 1994. Vol. 1, no. 4. P. 335–346.

70. *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(nr, F)$ of Certain Subgroups of $\mathrm{SL}(n, K)$, II. 1997.

71. *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(U \otimes W)$ of certain subgroups of $\mathrm{GL}(U) \otimes \mathrm{GL}(W)$. II. 1997.

72. *Li S.* Overgroups in $\mathrm{GL}(nr, F)$ of Certain Subgroups of $\mathrm{SL}(n, K)$, I // J. Algebr. 1989. Vol. 125, no. 1. P. 215–235.

73. *Li S.* Overgroups in $\mathrm{GL}(U \otimes W)$ of certain subgroups of $\mathrm{GL}(U) \otimes \mathrm{GL}(W)$. I // J. Algebr. 1991. Vol. 137, no. 2. P. 338–368.

74. *Li S.* Overgroups of $\mathrm{SU}(n, K, f)$ or $\Omega(n, K, Q)$ in $\mathrm{GL}(n, K)$ // Geom. Dedicata. 1990. Vol. 33, no. 3. P. 241–250.

75. *Li S.* Overgroups of a unitary group in $\mathrm{GL}(2, K)$ // J. Algebr. 1992. Vol. 149, no. 2. P. 275–286.

76. *Li S.* Subgroup structure of classical groups (In Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publ., 1998.

77. *Liebeck M. W.*, *Seitz G. M.* On the subgroup structure of classical groups // Invent. Math. 1998. Vol. 134, no. 2. P. 427–453.

78. *Milne J. S.* Basic Theory of Affine Group Schemes. 2012.

79. *Nhat N. H. T.*, *Hoi T. N.* The Normalizer of the Elementary Linear Group of a Module Arising when the Base Ring is Extended // J. Math. Sci. 2018. Vol. 234, no. 2. P. 197–202.

80. *Petrov V.* Overgroups of Unitary Groups // K-Theory. 2003. Vol. 29, no. 3. P. 147–174.

81. *Platonov V., Đoković D.* Subgroups of $\mathrm{GL}(n^2, \mathbb{C})$ containing $\mathrm{PSU}(n)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1996. Vol. 348, no. 1. P. 141–152.

82. *Platonov V. P., Đoković D. Ž.* Linear preserver problems and algebraic groups // Math. Ann. 1995. Vol. 303. P. 165–184.

83. *Plotkin E., Semenov A., Vavilov N.* Visual Basic Representations // Int. J. Algebra Comput. 1998. Vol. 08, no. 01. P. 61–95.

84. *Preusser R.* Sandwich classification for $\mathrm{GL}_n(R)$, $\mathrm{O}_{2n}(R)$ and $\mathrm{U}_{2n}(R, \Lambda)$ revisited // J. Gr. Theory. 2018. Vol. 21, no. 1. P. 21–44.

85. *Preusser R.* Sandwich classification for $\mathrm{O}_{2n+1}(R)$ and $\mathrm{U}_{2n+1}(R, \Delta)$ revisited // J. Gr. Theory. 2018. Vol. 21, no. 4. P. 539–571.

86. *Preusser R.* Structure of Hyperbolic Unitary Groups II: Classification of E-Normal Subgroups // Algebr. Colloq. 2017. Vol. 24, no. 02. P. 195–232.

87. *Seitz G. M.* The maximal subgroups of classical algebraic groups // Mem. Am. Math. Soc. 1987. Vol. 67, no. 365.

88. *Stepanov A. V.* Nonstandard subgroups between $\mathrm{E}_n(R)$ and $\mathrm{GL}_n(A)$ // Algebr. Colloq. 2004. Vol. 10, no. 3. P. 321–334.

89. *Stepanov A.* Free product subgroups between Chevalley groups $G(\Phi, F)$ and $G(\Phi, F[t])$ // J. Algebr. 2010. Vol. 324, no. 7. P. 1549–1557.

90. *Stepanov A.* Subring subgroups in Chevalley groups with doubly laced root systems // J. Algebr. 2012. Vol. 362. P. 12–29.

91. *Stepanov A., Vavilov N.* Decomposition of Transvections: A Theme with Variations // K-Theory. 2000. Vol. 19, no. 2. P. 109–153.

92. *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Contemp. Math. T. 55. 1986. P. 693-710.

93. *Timmesfeld F. G.* Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-Type. Basel: Birkhäuser Basel, 2001. P. 389.

94. *Vaserstein L. N.* On the normal subgroups of GL_n over a ring // Lect. Notes Math. Vol. 854. 1981. P. 456–465.

95. *Vaserstein L. N.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tohoku Math. J. 1986. Vol. 38, no. 2. P. 219–230.

96. *Vavilov N. A.* Decomposition of unipotents for E_6 and E_7: 25 years after // J. Math. Sci. 2016. Vol. 219, no. 3. P. 355–369.

97. *Vavilov N.* Intermediate subgroups in Chevalley groups // Groups Lie Type their Geom. Vol. 207. Cambridge University Press, 1995. P. 233–280.

98. *Wang X. T.*, *Hong C. S.* Overgroups of the elementary unitary group in linear group over commutative rings // J. Algebr. 2008. Vol. 320, no. 3. P. 1255–1260.

99. *Waterhouse W. C.* Automorphisms of $\det(X_{ij})$: the group scheme approach // Adv. Math. (N. Y). 1987. Vol. 65, no. 2. P. 171–203.

100. *Waterhouse W. C.* Automorphisms of quotients of $\prod GL(n_i)$ // Pacific J. Math. 1982. Vol. 102, no. 1. P. 221–233.

101. *Waterhouse W. C.* Introduction to Affine Group Schemes. Vol. 66. New York, NY: Springer New York, 1979. (Graduate Texts in Mathematics).

102. *Waterhouse W. C.* Invertibility of linear maps preserving matrix invariants // Linear Multilinear Algebr. 1983. Vol. 13, no. 2. P. 105–113.

103. *You H.* Overgroups of classical groups in linear group over Banach algebras // J. Algebr. 2006. Vol. 304, no. 2. P. 1004–1013.

104. *You H.* Overgroups of classical groups over commutative rings in linear group // Sci. China Ser. A. 2006. Vol. 49, no. 5. P. 626–638.

105. *You H.* Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings // J. Algebr. 2004. Vol. 282, no. 1. P. 23–32.

106. *Лубков Р. А.* Обратное разложение унипотентов в поливекторных представлениях. 2022. Препринт, Зап. научн. сем. ПОМИ.

107. *Лубков Р. А.*, *Некрасов И. И.* Явные уравнения на внешний квадрат полной линейной группы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т. 470. С. 120—137.

108. *Lubkov R.*, *Stepanov A.* Subgroups of Chevalley groups over rings // J. Math. Sci. 2021. Vol. 252, no. 6. P. 829–840.

109. *Lubkov R.* Overgroups of elementary groups in polyvector representations. 2022. Preprint `https://arxiv.org/abs/2203.13683`.

110. *Lubkov R.* The reverse decomposition of unipotents for bivectors // Commun. Algebr. 2021. Vol. 49, no. 10. P. 4546–4556.

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute
of Russian Academy of Sciences

manuscript

Roman Lubkov

Overgroups of the elementary subgroups of reductive groups in irreducible representations

1.1.5. Mathematical logic, algebra,
number theory, and discrete mathematics

Candidate of Physical and Mathematical sciences

Translation from Russian

Scientific advisor:
Cand. Sc. Victor Petrov

St. Petersburg
2022

Contents

Introduction

The object of research are reductive groups and their irreducible representations over an arbitrary commutative ring, **the subject of research** are their structure and properties. **The purpose of research** is to classify all overgroups of the elementary subgroups of reductive groups in irreducible representations.

Relevance of the topic. Based on the classification of finite simple groups in 1984, Michael Aschbacher established the Subgroup Structure Theorem [3]. It defines eight explicitly described classes $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$ and an exceptional class $\mathcal{S}$ for all maximal subgroups of a finite classical group. The philosophy of the project and ideas of proofs were also described in his survey [4]. Later, using the theory of algebraic groups, Martin Liebeck and Gary Seitz proposed a much simpler proof of this theorem [50].

Over the past decades, many researchers studied subgroups of groups from Aschbacher classes. However almost all results were obtained for some special cases of fields. For example, over a finite field Peter Kleidman and Martin Liebeck completely investigated maximality of subgroups in the book [39]. Roger Dye, Oliver King, Shang Zhi Li, and others proved maximality of groups from Aschbacher classes for arbitrary fields or described its overgroups in cases, where they are not maximal, see [22–24; 36–38; 42; 47; 48].

The first attempts to transfer such results were initiated by Zenon Borevich and Nikolai Vavilov [10; 11] for the Aschbacher classes $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. They began a large cycle of research on the description of overgroups of certain groups from Aschbacher classes [61; 62; 72; 73; 82; 84–89; 94; 95]. To date, this problem remains very relevant, which is confirmed by a large number of recent publications devoted to this range of problems. Below we list the latest results obtained in this direction. We recommend the surveys [84; 96; 97], which contain necessary preliminaries, the complete history, and many further related references.

From the perspective of the Maximal Subgroup Classification Project, the above-mentioned Aschbacher classes $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ pertains to description of overgroups of subsystem subgroups. This field of study intensively studied by Alexei Stepanov, Nikolai Vavilov, and others [11; 31; 70]. For the class $\mathcal{C}_8$ in the 2000s, overgroups of classical groups were completely described by experts from the St. Petersburg school [62; 82; 94; 95] and independently from the Chinese school [98; 103–105]. These works were brilliantly resumed by Alexander Luzgarev. He obtained similar results for exceptional groups [51–53; 91; 92]. The study of overgroups of groups from the class $\mathcal{C}_5$, the so-called subrings subgroups, began with results of Nikolai Romanovskii, Yakov Nuzhin, and Anna Yakushevich [56–58]. Later Alexei Stepanov obtained [almost] final results in this class: for $\mathrm{GL}_n(R)$ and $\mathrm{EO}_{2l}(R)$, the description of overgroups is very seldom standard [72; 73], and for $\mathrm{Sp}_{2l}(R)$, $\mathrm{SO}_{2l+1}(R)$, and for the Chevalley group of type F_4, such a description is always standard under certain assumptions on the ring R such as $2 \in R^*$ [74]. For the class $\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_7$, there are only separate results such as a partial description of overgroups of the tensor product of elementary groups, see [1; 2]. Recall that over a field the description of overgroups of the tensor product $\mathrm{SL}_n(K)$ and $\mathrm{SL}_m(K)$ follows from the paper by Shang Zhi Li [46]. For the class $\mathcal{C}_3$ description of overgroups, ring extension subgroups, extremely difficult. Only for the general linear group Shang Zhi Li described overgroups for for an arbitrary finite extension of fields [43; 45]. Over a field he also described overgroups of groups from $\mathcal{C}_4$ but not from $\mathcal{C}_7$ [41; 44; 46; 49].

Let us mention another closely related series of works by Vladimir Platonov, Dragomir Djoković, Robert Guralnick, William Waterhouse, and others [20; 21; 26–30; 63; 64; 102] on overgroups of semisimple subgroups related to linear preserver problems. In these papers they consider similar problems on description of overgroups, e. g., for the image of the elementary group in the adjoint embedding. For arbitrary rings a lot of problems are not solved. There are only results for classical fields such as $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$.

State of the art. The present research pertains to the exceptional Aschbacher class $\mathcal{S}$, consisting of almost simple groups in some absolutely irreducible representations. There were extremely few results for this class over arbitrary rings. Let us note only the two closest fields of research related to the initial topic. Over finite fields Bruce Cooperstein proved maximality of the normalizer of the elementary groups in the bivector representation [16]. And for the polyvector representation over an algebraically closed field description of overgroups of the elementary groups follows from the results of Gary Seitz on maximal subgroups of classical algebraic groups, see, for instance [13; 69].

Methods. For description of overgroups we use the base scheme of study developed by Vavilov and Borevich. However since the research belongs to the exceptional Aschbacher class, it is necessary to apply modified or even new methods to solve the problem. The work uses the method of the reverse decomposition of unipotents, Waterhouse's lemma on the isomorphism of algebraic schemes, a method of extracting a non-trivial transvection from an intermediate subgroup based on the concept of a generic element, and other results and methods from representation and invariant theories.

Approbation of work. All main methods and results of the dissertation are new, are equipped with detailed proofs, and are published in refereeing scientific journals, that certifies their reliability [106–110]. In the case of co-authored works, the author tried to present in detail only his own contribution but certainly such a strict separation cannot always be done consistently: in the paper [108] the author proved Theorems 5–7 dedicated to the search of equations on the scheme $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n$ and geometric interpretation of these equations, and in the paper [107] the author owns the results related to the calculation of transporters and normalizers of Chevalley groups.

Methods and main results of this work were presented in the form of posters and plenary lectures on the following international conferences.

- Schools–conference "Lie algebras, algebraic groups, and invariant theory", 2017;
- Modern Algebraic Geometry, Peking University, China, 2018;
- Schools–conference "Lie algebras, algebraic groups, and invariant theory", 2020.

The author presented talks on the topic of the dissertation:

- St. Petersburg algebraic D. K. Faddeev seminar, PDMI of RAS, St. Petersburg, 2017;
- Algebraic groups, SPbU, St. Petersburg, 2021.

The work is of **theoretical nature**, its results can be applied in the theory of linear algebraic groups, when holding educational and scientific seminars.

Organization of the dissertation. The work consists of four sections and of the conclusion. The first Section is devoted to all technically complex calculations that are related to the description of overgroups of the elementary groups. The lower level of an intermediate subgroup is constructed, the normalizers of connected intermediate subgroups are calculated. In the second Section we discuss the structure of the general linear group in polyvector representations. In §2.1 we recall the necessary known results to describe $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_\,)$ via the stabilizer of Plücker polynomials. In §§2.2–2.3 we construct invariant forms that define $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_\,)$. Over a field these forms are classically known. We prove the corresponding group scheme to be smooth over $\mathbb{Z}$. So the latter result holds over an arbitrary commutative ring. Using this concept, in §2.4 we describe the normalizer of the elementary subgroup.

The third Section contains results related to the decomposition of unipotents and its variations. We prove stabilization theorems, construct several series of equations defining the general linear group in polyvector representations, and also develop an idea of the reverse decomposition of unipotents.

In the fourth Section, a new method is developed that allows us to study the lattice of subgroups in a Chevalley group containing an image of the elementary subgroup of some another Chevalley group. The application of this tool for the dissertation problem is presented.

Finally, in the conclusion an overview of main results that are **presented to defense** is given, and some possible directions of further research are described.

1. Fundamental representations of the general linear group

1.1. Principal notation. In the sequel, we use the following notation, which is utterly standard in Chevalley group theory.

First let G be a group. By a commutator of two elements we always mean *the left-normed* commutator $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, where $x, y \in G$. Multiple commutators are also left-normed; in particular, $[x, y, z] = [[x, y], z]$. By ${}^xy = xyx^{-1}$ we denote *the left conjugates* of y by x. Similarly, by $y^x = x^{-1}yx$ we denote *the right conjugates* of y by x. $y^{\pm x}$ is the right conjugates of y by x or x^{-1}. In the sequel, we use the Hall–Witt identity:

$$[x, y^{-1}, z^{-1}]^x \cdot [z, x^{-1}, y^{-1}]^z \cdot [y, z^{-1}, x^{-1}]^y = e.$$

For a subset $X \subseteq G$, we denote by $\langle X \rangle$ a subgroup it generates. The notation $H \leqslant G$ means that H is a subgroup in G, while the notation $H \trianglelefteqslant G$ means that H is a normal subgroup in G. For $H \leqslant G$, we denote by $\langle X \rangle^H$ the smallest subgroup in G containing X and normalized by H. For two groups $F, H \leqslant G$, we denote by $[F, H]$ their mutual commutator: $[F, H] = \langle [f, g]$ for $f \in F, h \in H \rangle$.

Now let E, F be two subgroups of a group G. Recall that the *transporter* of the subgroup E to the subgroup F is the set

$$\mathrm{Tran}_G(E, F) = \{g \in G \mid E^g \leqslant F\}.$$

In fact, we mostly use this notation in the case $E \leqslant F$, and then

$$\mathrm{Tran}_G(E, F) = \{g \in G \mid [g, E] \leqslant F\}.$$

Also, we need some notation from elementary ring theory. Let R be an associative ring with 1. By default, it is assumed to be commutative. By an ideal I of the ring R we understand *the two-sided ideal* and this is denoted by $I \trianglelefteqslant R$. As usual, R^* denotes a multiplicative group of the ring R. A multiplicative group of matrices over the ring R is called a general linear group and is denoted by $\mathrm{GL}_n(R) = \mathrm{M}_n(R)^*$. A special linear group $\mathrm{SL}_n(R)$ is a subgroup of $\mathrm{GL}_n(R)$ consisting of matrices of determinant 1. By $a_{i,j}$ we denote an entry of a matrix a at the position (i, j), where $1 \leqslant i, j \leqslant n$. For entries of the inverse matrix we use the standard notation $a'_{i,j} := (a^{-1})_{i,j}$ and for the j-th column or the i-th row of a we write $a_{*,j}$ and $a_{i,*}$.

Further, e denotes the identity matrix and $e_{i,j}$ denotes the standard matrix unit, i. e., the matrix that has 1 at the position (i, j) and zeros elsewhere. By $t_{i,j}(\xi)$ we denote an elementary transvection, i. e., a matrix of the form $t_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{i,j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in R$. The following relations are well known, see [75].

(1) additivity:

$$t_{i,j}(\xi)t_{i,j}(\zeta) = t_{i,j}(\xi+\zeta).$$

(2) the Chevalley commutator formula:

$$[t_{i,j}(\xi), t_{h,k}(\zeta)] = \begin{cases} e, & \text{if } j \neq h, i \neq k, \\ t_{i,k}(\xi\zeta), & \text{if } j = h, i \neq k, \\ t_{h,j}(-\zeta\xi), & \text{if } j \neq h, i = k. \end{cases}$$

A subgroup $E_n(R) \leqslant GL_n(R)$ generated by all elementary transvections is called an [*absolute*] *elementary group*:

$$E_n(R) = \langle t_{i,j}(\xi), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in R \rangle.$$

It is easy to calculate the centralizer of the elementary group $C_{M_n(R)}\big(E_n(R)\big) = Re$ and $C_{GL_n(R)}\big(E_n(R)\big) = C_n(R) = \lambda e$, $\lambda \in R^*$ — the center of the group $GL_n(R)$. In particular, $C\big(E_n(R)\big) = \mu_n(R)$ — roots of 1 of degree n in the ring R. Indeed, for $n \geqslant 2$ the group $E_n(R)$ is absolutely irreducible, i. e., it additively generates $M_n(R)$.

Now define a normal subgroup of $E_n(R)$, which plays a crucial role to calculate levels of intermediate subgroups. Let I be an ideal in R. Consider a subgroup $E_n(R, I)$ generated by all elementary transvections of level I, i. e., $E_n(R, I)$ is a normal closure of $E_n(I)$ in $E_n(R)$. This group is called a [*relative*] *elementary group of level* I:

$$E_n(R, I) = \langle t_{i,j}(\xi), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in I \rangle^{E_n(R)}.$$

If $n \geqslant 3$, then for a commutative ring R Suslin's theorem [76] states that the elementary group is normal in the general linear group $GL_n(R)$. Moreover, under the same assumption the group $E_n(R, I)$ is generated by transvections of the form $z_{i,j}(\xi,\zeta) = t_{j,i}(\zeta)t_{i,j}(\xi)t_{j,i}(-\zeta)$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in I$, $\zeta \in R$. This fact was proved by Leonid Vaserstein and Andrey Suslin [81].

By R^n we denote the free right R-module. It consists of columns with coordinates in the ring R. The standard basis of R^n is denoted by $e_1, \dots, e_n$. Let P_m be a [standard] parabolic subgroup of the coordinate subspace $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$. It equals the stabilizer $\mathrm{Stab}\big(\langle e_1, \dots, e_m \rangle\big)$. Its conjugates are called parabolics of type P_m. Further, let U_m be a subgroup of P_m generated by elementary transvections $t_{i,j}(\xi)$, where $1 \leqslant i \leqslant m, m+1 \leqslant j \leqslant n, \xi \in R$. It is called the unipotent radical of P_m. Obviously, U_m is an abelian normal subgroup of P_m.

By $[n]$ we denote the set $\{1, 2, \dots, n\}$ and by $\bigwedge^m[n]$ we denote an exterior power of the set $[n]$. Elements of $\bigwedge^m[n]$ are ordered subsets $I \subseteq [n]$ of cardinality m without repeating entries:

$$\textstyle\bigwedge^m[n] = \{(i_1, i_2, \dots, i_m) \mid i_j \in [n]\}.$$

We use the lexicographic order on $\bigwedge^m[n]$ by default: $12\dots(m-1)m < 12\dots(m-1)(m+1) < \dots$

Usually, we write an index $I=\{i_j\}_{j=1}^m$ in the ascending order $i_1<i_2<\dots<i_m$. Sign $\operatorname{sgn}(I)$ of the index $I=(i_1,\dots,i_m)$ equals the sign of the permutation mapping $(i_1,\dots,i_m)$ to the same set in the ascending order. For example, $\operatorname{sgn}(1234)=\operatorname{sgn}(1342)=+1$ but $\operatorname{sgn}(1324)=\operatorname{sgn}(4123)=-1$. Moreover, we define the sign for two intersecting indices I,J as follows. Let $I\cap J=K$, then $\operatorname{sgn}(I,J):=\operatorname{sgn}(K\bar{I},K\bar{J})\operatorname{sgn}(I\mapsto K\bar{I})\operatorname{sgn}(J\mapsto K\bar{J})$, where the first sign equals $\operatorname{sgn}(\bar{I},\bar{J})$ by definition and the latter two signs are defined similarly to the usual sign as the parity of the number of inversions for indices I and J in $K\bar{I}$ and $K\bar{J}$, respectively. For example, $\operatorname{sgn}(1235,1246)=\operatorname{sgn}(35,46)(+1)(+1)=-1$ but $\operatorname{sgn}(1235,1346)=\operatorname{sgn}(25,46)(-1)(+1)=+1$. We extend the definition of the sign to multisets. Let $\operatorname{sgn}(i_1,\dots,i_m)=0$, if there are identical numbers in the set $i_1,\dots,i_m$. For an arbitrary index $I=\{i_1,\dots,i_m\}\in\bigwedge^m[n]$ by $\{i_1,\dots\widehat{i_p},\dots,i_m\}$ we denote the index $I\smallsetminus i_p\in\bigwedge^{m-1}[n]$.

Finally, let R be a commutative ring and let $n\geqslant 3$, $m\leqslant n$. *By* N *we denote the binomial coefficient* $\binom{n}{m}$. In the sequel, we denote an elementary transvection in $E_N(R)$ by $t_{I,J}(\xi)$ for $I,J\in\bigwedge^m[n]$ and $\xi\in R$. For instance, the transvection $t_{12,13}(\xi)$ equals the matrix with 1's on the diagonal and ξ in the position $(12,13)$.

1.2. **Exterior powers of elementary groups.** Let R be a commutative ring with 1 and let R^n be the right free R-module with the standard basis $\{e_1,\dots,e_n\}$, $n\geqslant 3$. By $\bigwedge^m R^n$ we denote the universal object in the category of alternating m-linear maps from R^n to R-modules. Concretely, take the free module of rank $N=\binom{n}{m}$ with the basis $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}$, where $1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n$, $1\leqslant m\leqslant n$. The elements $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}$ for arbitrary $i_1,\dots,i_m$ are defined by the relation $e_{\sigma(i_1)}\wedge\dots\wedge e_{\sigma(i_m)}=\operatorname{sgn}(\sigma)\,e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}$ for any permutation σ in the permutation group S_m.

For every m define $\bigwedge^m$ as a homomorphism from $GL_n(R)$ into $GL_N(R)$ by

$$\textstyle\bigwedge^m(g)(e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}):=(ge_{i_1})\wedge\dots\wedge(ge_{i_m})$$

for every $e_{i_1},\dots,e_{i_m}\in R^n$. Thus in the basis $e_I, I\in\bigwedge^m[n]$ a matrix $\bigwedge^m(g)$ consists of m-order determinants of the matrix g with lexicographically ordered columns and rows:

$$\Big(\textstyle\bigwedge^m(g)\Big)_{I,J}=\Big(\textstyle\bigwedge^m(g)\Big)_{(i_1,\dots,i_m),(j_1,\dots,j_m)}=\Delta^{j_1,\dots,j_m}_{i_1,\dots,i_m}(g).$$

Since $\bigwedge^m\colon GL_n(R)\longrightarrow GL_N(R)$ is a homomorphism, $\bigwedge^m$ is a representation of the group $GL_n(R)$ of degree N. It is called the m-th *vector representation* or the m-th *fundamental representation* (*the representation with the highest weight* ϖ_m). $\bigwedge^m GL_n(R)$ is called the m-th exterior power of the general linear group. $E_n(R)$ is a subgroup of $GL_n(R)$. Therefore the exterior power of the elementary group is well defined. The following lemma is an elementary corollary of Suslin's theorem:

Lemma 1. *The image of the elementary group is normal in the image of the general linear* *group under the exterior power homomorphism:*

$$\bigwedge^m\Big(\mathrm{E}_n(R)\Big) \trianglelefteq \bigwedge^m\Big(\mathrm{GL}_n(R)\Big).$$

We cannot but emphasize the difference for arbitrary rings between $\bigwedge^m\Big(\mathrm{GL}_n(R)\Big)$ and $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. The first group is the image of the general linear group $\mathrm{GL}_n(R)$ under the Cauchy–Binet homomorphism: $\bigwedge^m\colon \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R)$, while the second one is the group of R-points of the group scheme $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Since epimorphisms of algebraic groups on points are not surjective, we see that $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ is strictly larger than $\bigwedge^m\Big(\mathrm{GL}_n(R)\Big)$ for rings. In fact, see §2, elements of $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ are still images of matrices, but coefficients are not from the ring itself, but from its extension. This means that for any commutative ring R elements $\tilde{g} \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ can be represent in the form $\tilde{g} = \bigwedge^m g$, $g \in \mathrm{GL}_n(S)$, where S is an extension of the ring R. We refer the reader to [93] for more precise results about the difference between these groups.

The following characterization of the elementary group plays a crucial role in the sequel. It follows from the more general results of Anthony Bak, Roozbeh Hazrat, and Nikolai Vavilov, see [5; 6; 32]. Note that in these papers the following result was not explicitly formulated, but it is immediately follows from the existence of a nilpotent filtration of $\mathrm{GL}_n(R)$.

Lemma 2. *Let R be a Noetherian commutative ring, $n \geqslant 3$. Then $\mathrm{E}_n(R)$ is the largest perfect subgroup in $\mathrm{GL}_n(R)$.*

In other words, the elementary subgroup is the *perfect radical* of the general linear group. This immediately implies that $\mathrm{E}_n(R)$ is a fully characteristic subgroup for Noetherian rings. Obviously, then $\bigwedge^m \mathrm{E}_m(R)$ is also the perfect radical of $\mathrm{GL}_N(R)$. We use the inductive system of all finitely generated subrings in R with respect to inclusion to reduce proofs to Noetherian rings.

Lemma 3. *Let $R_i, i \in I$ be an inductive system of rings. Then*

$$\mathrm{GL}_n(\varinjlim R_i) = \varinjlim \mathrm{GL}_n(R_i), \quad \mathrm{E}_n(\varinjlim R_i) = \varinjlim \mathrm{E}_n(R_i).$$

For the general linear group this fact is well known. It is valid simply because this is an affine group scheme. Since the elementary subgroup is generated by the groups of points of affine group schemes $X_{i,j}$, we see that for E_n this fact is also valid.

Note that $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ is normal not only in the image of the general linear group but in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. The following result is a very special case of Theorem 1 in the paper by Victor Petrov and Anastasia Stavrova [60].

Theorem 4. *Let R be a commutative ring, $n \geqslant 3$. Then $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \trianglelefteq \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.*

For the exterior powers of the general linear group, the exterior square plays a special role. In all problems related to the calculation of overgroups, normalizers $\bigwedge^m E_n(R)$ in $GL_{\binom{n}{m}}(R)$, the construction of invariant forms defining the group $\bigwedge^m GL_n(R)$, and for many others, the exterior square compares favorably with the general case. First technically overloaded proofs of statements in the general case are often a generalization of simpler proofs for the exterior square. Second there are some results for the exterior square, which cannot be obtained even for the exterior cube or other powers. For instance, in the section 3.1 we construct a transvection $T_{*,j} \in \bigwedge^2 E_n(R)$ such that it stabilizes an arbitrary column of a matrix g in $GL_{\binom{n}{2}}(R)$. At the same time there are no analogues of this transvection for other exterior powers.

Let $x \in E_n(R)$. The following proposition can be obtained by the very definition of the [classical] Binet–Cauchy homomorphism.

Proposition 5. *Let $t_{i,j}(\xi)$ be an elementary transvection in $E_n(R)$, $n \geqslant 3$. Then $\bigwedge^m t_{i,j}(\xi)$ equals*

$$\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) = \prod_{L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]} t_{L\cup i, L\cup j}(\operatorname{sgn}(i,L)\operatorname{sgn}(j,L)\xi) \tag{1}$$

for any $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Similarly, one can get an explicit form of torus elements $h_{\varpi_m}(\xi)$ of the group $\bigwedge^m GL_n(R)$.

Proposition 6. *Let $d_i(\xi) = e + (\xi - 1)e_{i,i}$ be a torus generator, $1 \leqslant i \leqslant n$. Then the exterior power of $d_i(\xi)$ equals a diagonal matrix, with diagonal entries 1 everywhere except in $\binom{n-1}{m-1}$ positions:*

$$\bigwedge^m \big(d_i(\xi)\big)_{I,I} = \begin{cases} \xi, & \textit{if } i \in I, \\ 1, & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

As an example, consider $\bigwedge^3 t_{1,3}(\xi) = t_{124,234}(-\xi)t_{125,235}(-\xi)t_{145,345}(\xi) \in \bigwedge^3 E_5(R)$ and $\bigwedge^4 d_2(\xi) = \operatorname{diag}(\xi, \xi, \xi, 1, \xi) \in \bigwedge^4 E_5(R)$. It follows from the propositions $\bigwedge^m t_{i,j}(\xi) \in E^{\binom{n-2}{m-1}}(N, R)$, where by definition every element of the set $E^M(N, R)$ is a product of M or less elementary transvections. In other words, the residue of a transvection $\operatorname{res}(\bigwedge^m t_{i,j}(\xi))$ equals the binomial coefficient $\binom{n-2}{m-1}$. Recall that the residue $\operatorname{res}(g)$ of a transformation g is the rank of $g - e$. Finally, there is a simple connection between the determinant of a matrix $g \in GL_n(R)$ and the determinant of $\bigwedge^m g \in \bigwedge^m GL_n(R)$, see [100, Proof of Theorem 4]:

$$\det \bigwedge^m g = \big(\det(g)\big)^{\binom{n}{m}\cdot\frac{m}{n}} = \big(\det(g)\big)^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

1.3. **Elementary calculations technique.** For an arbitrary exterior power calculations with elementary transvections are huge. In this section, we organize all possible calculations of a commutator of an elementary transvection with an exterior transvection.

Proposition 7. *Up to the action of the permutation group there exist three types of commutators with a fixed transvection* $t_{I,J}(\xi) \in E_N(R)$:

(1) $[t_{I,J}(\xi), \bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = 1$ *if both* $i \notin I$ *and* $j \notin J$ *hold;*

(2) $[t_{I,J}(\xi), \bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta\xi)$ *if either* $i \in I$ *or* $j \in J$. *And then* $\tilde{I} = I\backslash i \cup j$ *or* $\tilde{J} = J\backslash j \cup i$, *respectively;*

(3) *If both* $i \in I$ *and* $j \in J$ *hold, then we have the equality:*

$$[t_{I,J}(\xi), \textstyle\bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi).$$

Note that the latter case is true whenever $I \setminus i \neq J \setminus j$, otherwise we obtain $[t_{I,J}(\xi), t_{J,I}(\pm\zeta)]$. This commutator cannot be presented in a simpler form than the very definition.

1.4. **Level computation.** Let H be an overgroup of the exterior power of the elementary group $\bigwedge^m E_n(R)$:

$$\textstyle\bigwedge^m E_n(R) \leqslant H \leqslant GL_N(R).$$

Consider two indices $I, J \in \bigwedge^m[n]$. By $A_{I,J}$ we denote the set

$$A_{I,J} := \{\xi \in R \mid t_{I,J}(\xi) \in H\} \subseteq R.$$

By definition diagonal sets $A_{I,I}$ equal whole ring R for any index I. In the rest of the section, we prove that these sets are ideals, i. .e., $A_{I,J}$ form a net of ideals. Moreover, we will get D-net in terms of Zenon Borevich [9] by the latter statement. The first step to the level computation is the following observation.

Proposition 8. *If* $|I \cap J| = |K \cap L|$, *then sets* $A_{I,J}$ *and* $A_{K,L}$ *coincide. In fact,* $A_{I,J}$ *are ideals of* R.

But first we prove a weaker statement.

Lemma 9. *Let* I, J, K, L *be different elements of the set* $\bigwedge^m[n]$ *such that* $|I \cap J| = |K \cap L| = 0$. *If* $n \geqslant 2m$, *then sets* $A_{I,J}$ *and* $A_{K,L}$ *coincide.*

Proof of the lemma. The sets $A_{I,J}$ coincide when the set $I \cup J$ is fixed. This fact can be proved by the third type commutation due to Proposition 7 with ζ and $-\zeta$. If $\xi \in A_{I,J}$, we get a transvection $t_{I,J}(\xi) \in H$. Then the following two products also belong to H:

$$[t_{I,J}(\xi), \textstyle\bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi)$$
$$[t_{I,J}(\xi), \textstyle\bigwedge^m t_{j,i}(-\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\mp\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\mp\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi).$$

This implies that the product of two factors on the right-hand sides $t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm 2\zeta^2\xi)$ belongs to H.

It can be easily proved that the set $I \cup J$ can be changed by the second type commutations. For example, the set $I_1 \cup J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ can be replaced by the set $I_2 \cup J_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

as follows

$$[t_{123,456}(\xi), \textstyle\bigwedge^3 t_{6,7}(\zeta)] = t_{123,457}(\xi\zeta).$$

□

Proof of Proposition 8. Arguing as above, we see that the sets $A_{I,J}$ and $A_{K,L}$ coincide in the case $I \cap J = K \cap L$, where $n_1 = n - |I \cap J| \geqslant 2 \cdot m - 2 \cdot |I \cap J| = 2 \cdot m_1$.

In the general case we can prove the statement by both the second and the third types commutations. Let us give an example of this calculation with replacing the set $I \cap J = \{1, 2\}$ by the set $\{1, 5\}$.

Let $t_{123,124}(\xi) \in H$. So we have $[t_{123,124}(\xi), \bigwedge^3 t_{2,5}(\zeta)] = t_{123,145}(-\xi\zeta) \in H$. We commute this transvection with the element $\bigwedge^3 t_{5,2}(\zeta_1)$. Then the transvection $t_{135,124}(-\zeta_1^2\xi\zeta)$ belongs to H as well as the product $t_{123,124}(\xi\zeta\zeta_1) \cdot t_{135,145}(-\zeta_1\xi\zeta) \in H$. From the latter inclusion we see $t_{135,145}(-\zeta_1\xi\zeta) \in H$ and $I \cap J = \{1, 5\}$.

To prove that all $A_{I,J}$ are ideals in R it is sufficient to commute any elementary transvection with exterior transvections with ζ and 1:

$$t_{I,J}(\xi\zeta) = [t_{I,J}(\xi), \textstyle\bigwedge^m t_{j,i}(\zeta), \bigwedge^m t_{i,j}(\pm 1)] \in H.$$

□

Let $t_{I,J}(\xi)$ be an elementary transvection. Let us define a *distance* between I and J as the cardinality of the set $I \cap J$:

$$d(I, J) = |I \cap J|.$$

This combinatorial characteristic plays the same role as the distance function $d(\lambda, \mu)$ for roots λ and μ on the weight diagram of a root system.

Now Proposition 8 can be rephrased as follows. Sets $A_{I,J}$ and $A_{K,L}$ coincide for the same distances: $A_{I,J} = A_{K,L} = A_{|I \cap J|}$. Suppose that $d(I, J)$ is larger than $d(K, L)$, then using Proposition 7, we get $A_{I,J} \leqslant A_{K,L}$.

Summarizing the above arguments, we have

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_{m-2} \geqslant A_{m-1}.$$

Proposition 10. *The ideals* A_k *coincide for* $n \geqslant 3m$. *More accurately, the inverse inclusion* $A_k \leqslant A_{k+1}$ *holds if* $n \geqslant 3m - 2k$.

Proof. The statement can be proved by the double third type commutation as follows. Let $\xi \in A_k$, i. e., a transvection $t_{I,J}(\xi) \in H$ for $d(I, J) = k$. By the third type commutation with a transvection $\bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)$, we have $t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \in H$. Let us consider an analogous commutator with specifically chosen transvections $t_{I_1,J_1}(\xi) \in H$ and $\bigwedge^m t_{j_1,i_1}(\zeta_1)$. We get that $t_{\tilde{I}_1,J_1}(\pm\zeta_1\xi) \cdot t_{I_1,\tilde{J}_1}(\pm\zeta_1\xi) \in H$. The final step is to commute the latter products.

The choice of transvections goes in the way such that the final commutator (initially of the form $[ab, cd]$) equals an elementary transvection. This choice is possible due to the condition $n \geqslant 3m - 2k$.

Let us give a particular example of such calculations for the case $m = 4$. This calculation could be easily generalized. The first three steps below correspond to the inclusions $A_0 \leqslant A_1$, $A_1 \leqslant A_2$, and $A_2 \leqslant A_3$, respectively. We emphasize that the ideals of the proof of all three steps are **completely** identical. The difference is only with a choice of the appropriate indices. We replace the numbers 10, 11, 12 with the letters α, β, γ, respectively.

(1) Let $\xi \in A_0$. Consider the mutual commutator

$$\Big[[t_{1234,5678}(\xi), \textstyle\bigwedge^4 t_{8,4}(\zeta)], [t_{49\alpha\beta,123\gamma}(\xi), \textstyle\bigwedge^4 t_{\gamma,4}(\zeta_1)]\Big] \in H.$$

It is equal to the commutator

$$[t_{1234,4567}(-\xi\zeta) \cdot t_{1238,5678}(-\zeta\xi), t_{49\alpha\beta,1234}(\xi\zeta_1) \cdot t_{9\alpha\beta\gamma,123\gamma}(\zeta_1\xi)] \in H,$$

which is a transvection $t_{49\alpha\beta,4567}(\xi^2\zeta_1\zeta) \in H$. As the result, $A_0 \leqslant A_1$.

(2) For $\xi \in A_1$ consider the similar commutator

$$\Big[[t_{1234,1567}(\xi), \textstyle\bigwedge^4 t_{7,4}(\zeta)], [t_{1489,123\alpha}(\xi), \textstyle\bigwedge^4 t_{\alpha,4}(\zeta_1)]\Big] \in H.$$

Thus

$$[t_{1234,1456}(\xi\zeta) \cdot t_{1237,1567}(-\zeta\xi), t_{1489,1234}(\xi\zeta_1) \cdot t_{189\alpha,123\alpha}(-\zeta_1\xi)] \in H.$$

Again, this commutator is equal to $t_{1489,1456}(-\xi^2\zeta_1\zeta) \in H$, i. e., $A_1 \leqslant A_2$.

(3) Finally, let $\xi \in A_2$. Consider the commutator

$$\Big[[t_{1234,1256}(\xi), \textstyle\bigwedge^4 t_{6,4}(\zeta)], [t_{1248,1237}(\xi), \textstyle\bigwedge^4 t_{7,4}(\zeta_1)]\Big] \in H.$$

It is equal to the commutator

$$[t_{1234,1245}(-\xi\zeta) \cdot t_{1236,1256}(-\zeta\xi), t_{1248,1234}(\xi\zeta_1) \cdot t_{1278,1237}(-\zeta_1\xi)] \in H,$$

which is the elementary transvection $t_{1248,1245}(\xi^2\zeta_1\zeta) \in H$. Thus $A_2 \leqslant A_3$.

$\square$

We proved that all ideals A_i coincide for a large enough n. However the following proposition shows relations between the ideals without this restriction. Recall that the residue res of an exterior transvection $\bigwedge^m t_{i,j}(\xi)$ equals the binomial coefficient $\binom{n-2}{m-1}$.

Proposition 11. *The ideals* $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ *are interrelated as follows:*

$$A_k \leqslant A_{k+1}, \text{ for } n \geqslant 3m - 2k;$$
$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \dots \geqslant A_{m-2} \geqslant A_{m-1};$$
$$\mathrm{res} \cdot A_{m-2} \leqslant A_{m-1}.$$

Proof. The first two series of relations is proved in previous calculations. Therefore we must only prove that $\mathrm{res} \cdot A_{m-2} \leqslant A_{m-1}$. Again, we use the third type commutation.

Let $\xi \in A_{m-2}$, i. e., for any indices I, J with $d(I, J) = m - 2$ a transvection $t_{I,J}(\xi) \in H$. Note that if $i \in I, j \in J$, then in the commutator

$$[t_{I,J}(\xi), \bigwedge^m t_{j,i}(\zeta)] = t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi)$$

the transvection $t_{\tilde{I},\tilde{J}}(\pm\zeta^2\xi)$ belongs to the group H. Indeed, the distance of indices $\tilde{I} = I\backslash i \cup j$ and $\tilde{J} = J\backslash j \cup i$ coincides with the distance of I, J. At the same time the distance of $\tilde{I}, J$ and $I, \tilde{J}$ equals $m - 1$. Thus $t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \in H$ for all indices I, J with $d(I, J) = m - 2$ and all different $i \in I, j \in J$.

Consider $\bigwedge^m t_{1,2}(\xi\zeta) \in H$, where $\zeta \in R$. By the definition of exterior transvections (1), we have $\bigwedge^m t_{1,2}(\xi\zeta) = \prod\limits_L t_{L\cup 1, L\cup 2}(\xi\zeta)$. The proof is to consistently reduce the number of factors in the product by multiplication $\bigwedge^m t_{1,2}(\xi\zeta)$ on appropriate transvections $t_{\tilde{I},J}(\pm\zeta\xi) \cdot t_{I,\tilde{J}}(\pm\zeta\xi) \in H$. Finally, we get an elementary transvection $t_{P\cup 1, P\cup 2}(c\xi\zeta)$, where the distance of the indices equals $m - 1$ and the coefficient c equals $\binom{n-2}{m-1}$.

Let us give an example such argument for the exterior cube of the elementary group of dimension 5. Take $\xi \in A_1, \zeta \in R$, $\bigwedge^3 t_{1,2}(\xi\zeta) = t_{134,234}(\xi\zeta) t_{135,235}(\xi\zeta) t_{145,245}(\xi\zeta)$.
First consider the commutator $[t_{134,245}(\xi), \bigwedge^3 t_{5,3}(\zeta)] \in H$. As we mentioned above, the matrix $z_1 := t_{134,234}(-\xi\zeta) t_{145,245}(\xi\zeta) \in H$. Thus

$$\bigwedge^3 t_{1,2}(\xi\zeta) \cdot z_1 = t_{135,235}(\xi\zeta) t_{145,245}(2\xi\zeta) \in H.$$

To get an elementary transvection, consider one more commutator
$[t_{135,245}(\xi), \bigwedge^3 t_{4,3}(-\zeta)] \in H$. Then the matrix $z_2 := t_{145,245}(\xi\zeta) t_{135,235}(-\xi\zeta) \in H$. It remains to multiply $\bigwedge^3 t_{1,2}(\xi\zeta)$ and $z_1 z_2$. We get the transvection $t_{145,245}(3\xi\zeta) \in H$. Therefore $3\xi\zeta \in A_2$. $\square$

Lemma 12. *For any ideal* $A \trianglelefteq R$, *we have*

$$E_N(A)^{\bigwedge^m E_n(R)} = E_N(R, A),$$

where by definition $E_N(R, A) = E_N(A)^{E_N(R)}$.

Proof. Clearly, the left-hand side is contained in the right-hand side. The proof of the inverse inclusion goes by induction on the distance of (I, J). By Vaserstein–Suslin's lemma [81] it is sufficient to check the matrix $z_{I,J}(\xi,\zeta)$ to belong to $F := E_N(A)^{\bigwedge^m E_n(R)}$ for any $\xi \in A$, $\zeta \in R$.

In the base case $|I \cap J| = m-1$, the inclusion is obvious:

$$z_{I,J}(\xi,\zeta)\cdot t_{I,J}(-\xi) = [t_{J,I}(\zeta), t_{I,J}(\xi)] = [\textstyle\bigwedge^m t_{j_1,i_1}(\zeta), t_{I,J}(\xi)] \in F.$$

Now let us consider the general case $|I \cap J| = p$, i.e., $I = k_1 \dots k_p i_1 \dots i_q$ and $J = k_1 \dots k_p j_1 \dots j_q$. For the following calculations we need two more sets $V := k_1 \dots k_p i_1 \dots i_{q-1} j_q$ and $W := k_1 \dots k_p j_1 \dots j_{q-1} i_q$.
First we express $t_{I,J}(\xi)$ as a commutator of elementary transvections,

$$z_{I,J}(\xi,\zeta) = {}^{t_{J,I}(\zeta)}\, t_{I,J}(\xi) = {}^{t_{J,I}(\zeta)}\, [t_{I,V}(\xi), t_{V,J}(1)].$$

Conjugating the arguments of the commutator by $t_{J,I}(\zeta)$, we get

$$[t_{J,V}(\zeta\xi)t_{I,V}(\xi), t_{V,I}(-\zeta)t_{V,J}(1)] =: [ab, cd].$$

Next we decompose the right-hand side using the formula

$$[ab, cd] = {}^{a}[b,c]\cdot {}^{ac}[b,d]\cdot [a,c]\cdot {}^{c}[a,d],$$

and observe the exponent a to belong to $E_N(A)$, so can be ignored. Now a direct calculation, based upon the Chevalley commutator formula, shows that

$$\begin{aligned}
[b,c] &= [t_{I,V}(\xi), t_{V,I}(-\zeta)] \in F \text{ (by the induction step for the distance } m-1);\\
{}^{c}[b,d] &= {}^{t_{V,I}(-\zeta)}\, [t_{I,V}(\xi), t_{V,J}(1)] = t_{V,W}(\xi\zeta^2)t_{I,W}(-\xi\zeta)\cdot {}^{\bigwedge^m t_{j_q,i_q}(-\zeta)}t_{I,J}(\xi);\\
[a,c] &= [t_{J,V}(\zeta\xi), t_{V,I}(-\zeta)] = t_{J,I}(-\zeta^2\xi);\\
{}^{c}[a,d] &= {}^{t_{V,I}(-\zeta)}\, [t_{J,V}(\zeta\xi), t_{V,J}(1)] =
\end{aligned}$$

$$= t_{J,W}(-\xi\zeta^2(1+\xi\zeta))t_{V,W}(-\xi\zeta^2)\cdot {}^{\bigwedge^m t_{j_q,i_q}(-\zeta)}t_{J,V}(\xi\zeta)\cdot {}^{\bigwedge^m t_{j_q,i_q}(-\zeta)}z_{J,V}(-\zeta\xi, 1) \in F,$$

(by the induction step for the distance $p+1$)

where all factors on the right-hand side belong to F. □

Corollary 13. *Suppose* A *be an arbitrary ideal of the ring* R*; then*

$$\textstyle\bigwedge^m E_n(R)\cdot E_N(R,A) = \bigwedge^m E_n(R)\cdot E_N(A).$$

If $n \geqslant 3m$, then the ideal $A = A_{I,J}$ is called a *level* of the overgroup H. Conversely, for $n < 3m$ a level consists of up to m ideals. An m-tuple of ideals $\mathbb{A} = (A_0, \dots, A_{m-1})$ of the ring R is called *admissible* if $\mathbb{A}$ satisfies the relations in Proposition 11. Then the *level* of H is an admissible m-tuple $\mathbb{A}$. Summarizing Proposition 10 and Lemma 12, we get the following important result.

Theorem 14 (Level computation). *Let $n \geqslant 3m$. For an arbitrary overgroup H of the group $\bigwedge^m E_n(R)$ there exists a unique maximal ideal A of the ring R such that*

$$\bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, A) \leqslant H.$$

Namely, if a transvection $t_{I,J}(\xi)$ belongs to the group H, then $\xi \in A$.

In the general case every admissible m-tuple $\mathbb{A}$ corresponds to the group $E \bigwedge^m E_n(R, \mathbb{A}) := \bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, \mathbb{A})$. This group is defined as a subgroup generated by $\bigwedge^m E_n(R)$ and by all elementary transvections $t_{I,J}(\xi)$, where $\xi \in A_{I,J}$:

$$E \bigwedge^m E_n(R, \mathbb{A}) = \bigwedge^m E_n(R) \cdot \langle t_{I,J}(\xi),\ \xi \in A_{I,J} \rangle.$$

Theorem 14′. *Let $n \geqslant 4$. For an arbitrary overgroup H of the group $\bigwedge^m E_n(R)$ there exists a net of ideals $\mathbb{A}$ of the ring R such that*

$$\bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, \mathbb{A}) \leqslant H.$$

Namely, if a transvection $t_{I,J}(\xi)$ belongs to the group H, then $\xi \in A_{I,J}$.

1.5. **Normalizer of $E \bigwedge^m E_n(R, A)$.** In this section, we describe the normalizer of the lower bound for a group H.

Lemma 15. *Let $n \geqslant 3m$. The group $E \bigwedge^m E_n(R, A) := \bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, A)$ is perfect for any ideal $A \trianglelefteq R$.*

Proof. It is sufficient to verify all generators of the group $\bigwedge^m E_n(R) \cdot E_N(R, A)$ to lie in its commutator subgroup, which is denoted by F. The proof goes in two steps.

- For transvections $\bigwedge^m t_{i,j}(\zeta)$ this follows from the Cauchy–Binet homomorphism:

$$\bigwedge^m t_{i,j}(\zeta) = \bigwedge^m \Big([t_{i,h}(\zeta), t_{h,j}(1)] \Big) = [\bigwedge^m t_{i,h}(\zeta), \bigwedge^m t_{h,j}(1)]\,.$$

- For elementary transvections $t_{I,J}(\xi)$ this can be done as follows. Suppose that $I \cap J = K = k_1 \dots k_p$, where $0 \leqslant p \leqslant m-1$, i. e., $I = k_1 \dots k_p i_1 \dots i_q$ and $J = k_1 \dots k_p j_1 \dots j_q$. As in Lemma 12, we define the set $V = k_1 \dots k_p j_1 \dots j_{q-1} i_q$, and then

$$t_{I,J}(\xi) = [t_{I,V}(\xi), t_{V,J}(1)] = \Big[t_{I,V}(\xi), \bigwedge^m t_{i_q, j_q}(\pm 1)\Big]\,,$$

so we get the required.

□

Let, as above, $A \trianglelefteq R$ and let R/A be the factor-ring of R modulo A. Denote by $\rho_A \colon R \longrightarrow R/A$ the canonical projection sending $\lambda \in R$ to $\bar{\lambda} = \lambda + A \in R/A$. Applying the projection to all entries of a matrix, we get the reduction homomorphism

$$\begin{array}{rccl} \rho_A\colon & \mathrm{GL}_n(R) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(R/A) \\ & a & \mapsto & \overline{a} = (\overline{a}_{i,j}) \end{array}$$

The kernel of the homomorphism ρ_A, $\mathrm{GL}_n(R, A)$, is called the *principal* [*relative*] *congruence subgroup in* $\mathrm{GL}_n(R)$ *of level* A. Now let $C_n(R)$ be the center of the group $\mathrm{GL}_n(R)$ consisting of the scalar matrices $\lambda e, \lambda \in R^*$. The full preimage of the center of $\mathrm{GL}_n(R/A)$, denoted by $C_n(R, A)$, is called the *full* [*relative*] *congruence subgroup of level* A. The group $C_n(R, A)$ consists of all matrices congruent to a scalar matrix modulo A. Note that $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A) \leqslant \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$, $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ and $\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ are normal in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. We further concentrate on study of the full preimage of the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)$:

$$\mathrm{C}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{GL}_n(R, A) = \rho_A^{-1}\Big(\bigwedge\nolimits^m \mathrm{GL}_n(R/A)\Big).$$

A key point in the reduction modulo an ideal is the following standard commutator formula proved by Leonid Vaserstein [80], Zenon Borevich, and Nikolai Vavilov [11].

$$\Big[\mathrm{E}_n(R), C_n(R, A)\Big] = \mathrm{E}_n(R, A) \text{ for a commutative ring } R \text{ and } n \geqslant 3.$$

Finally, we are ready to state the *level reduction* result.

Theorem 16. *Let* $n \geqslant 3m$. *For any ideal* $A \trianglelefteq R$, *we have*

$$N_{\mathrm{GL}_N(R)}\Big(\mathrm{E}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R, A)\Big) = \mathrm{C}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{GL}_n(R, A).$$

Proof. In the proof by N we mean $N_{\mathrm{GL}_N(R)}$.

Since $\mathrm{E}_N(R, A)$ and $\mathrm{GL}_N(R, A)$ are normal subgroups in $\mathrm{GL}_N(R)$, we see

$$N(\underbrace{\mathrm{E}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R, A)}_{=\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\,\mathrm{E}_N(R,A)}) \leqslant N\left(\mathrm{E}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R, A)\, \mathrm{GL}_N(R, A)\right) = \mathrm{C}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{GL}_n(R, A). \qquad (3)$$

Note that the latter equality is due to the normalizer functoriality:

$$N\left(\mathrm{E}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R, A)\, \mathrm{GL}_N(R, A)\right) = N\left(\rho_A^{-1}\left(\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R/A)\right)\right) =$$
$$\rho_A^{-1}\left(N\left(\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R/A)\right)\right) = \rho_A^{-1}\left(\bigwedge\nolimits^m \mathrm{GL}_n(R/A)\right).$$

In particular, using (3), we get

$$[\mathrm{C}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{GL}_n(R, A), \mathrm{E}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R, A)] \leqslant \mathrm{E}\bigwedge\nolimits^m \mathrm{E}_n(R, A)\, \mathrm{GL}_N(R, A). \qquad (4)$$

On the other hand, it is completely clear $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ to be normal in the right-hand side subgroup. Indeed, it is easy to prove the following stronger inclusion:

$$[\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)\,\mathrm{GL}_N(R,A), \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)] \leqslant \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A). \tag{5}$$

To check this we consider a commutator of the form

$$[xy, hg], \qquad x \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R), y \in \mathrm{GL}_N(R,A), h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), g \in \mathrm{E}_N(R,A).$$

Then $[xy, hg] = {}^x[y,h] \cdot [x,h] \cdot {}^h[xy,g]$. We must prove all factors on the right-hand side to belong to $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$. Right away, the second factor lies in the group $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$. For the first commutator we should consider the following inclusions:

$${}^{\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)}[\mathrm{GL}_N(R,A), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] \leqslant \Big[\underbrace{{}^{\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)}\mathrm{GL}_N(R,A)}_{=\mathrm{GL}_N(R,A)}, \underbrace{{}^{\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)}_{=\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)}\Big] \leqslant \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A).$$

The element $h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$, so we ignore it in conjugation. The third commutator lies in $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$ due to the following inclusion.

$$[\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)\,\mathrm{GL}_N(R,A), \mathrm{E}_N(R,A)] \leqslant [\mathrm{GL}_N(R), \mathrm{E}_N(R,A)] = \mathrm{E}_N(R,A).$$

Now using (4) and (5), we get

$$[\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R,A), \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A), \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)] \leqslant \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A). \tag{6}$$

To invoke the Hall—Witt identity, we need a slightly more precise version of the latter inclusion:

$$[[\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R,A), \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)]\,, [\mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R,A), \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)]] \leqslant \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A). \tag{7}$$

Observe that by formula (4) we already checked the left-hand side to be generated by the commutators of the form

$$[uv, [z,y]], \text{ where } u, y \in \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A), v \in \mathrm{GL}_N(R,A), z \in \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R,A).$$

However

$$[uv, [z,y]] = {}^u[v,[z,y]] \cdot [u,[z,y]],$$

By formula (6) the second commutator belongs to $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$, whereas by (7) the first one is an element of $[\mathrm{GL}_N(R,A), \mathrm{E}_N(R)] \leqslant \mathrm{E}_N(R,A)$.

Now we are ready to finish the proof. By the previous lemma, the group $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$ is perfect, and thus it suffices to show that $[z,[x,y]] \in \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A)$ for all $x, y \in \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R,A), z \in \mathrm{C}\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R,A)$. Indeed, the Hall—Witt identity yields

$$[z,[x,y]] = {}^{xz}[[z^{-1}, x^{-1}], y] \cdot {}^{xy}[[y^{-1}, z], x^{-1}],$$

where the second commutator belongs to $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ by (6). Removing the conjugation by $x \in \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ in the first commutator and carrying the conjugation by z inside the commutator, we see that it only remains to prove the relation $[[x^{-1}, z], [z, y]y] \in \mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$. Indeed,

$$[[x^{-1}, z], [z, y]y] = [[x^{-1}, z], [z, y]] \cdot {}^{[z,y]}[[x^{-1}, z], y],$$

where the both commutators on the right–hand side belong to $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$ by formulas (6) and (7), and moreover, the conjugating element $[z, y]$ in the second commutator is an element of the group $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)\,\mathrm{GL}_N(R, A)$, and thus by (5) normalizes $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$. $\square$

2. Normalizer of exterior powers

Following the standard scheme of description of overgroups, it is required to calculate the normalizer of $\bigwedge^m E_n(R)$. In this section, we show that it equals $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. In [93] the authors proved that $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ coincides with the stabilizer of the Plücker ideal. However this is not enough to our purpose. We have to use other invariants for the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, e. g., invariant forms. For classical and exceptional groups in natural representations over an arbitrary ring, these forms are well known, see, for instance [82; 91; 92; 94; 95]. In addition, a unified more general approach was recently developed, see the wonderful paper by Skip Garibaldi and Robert Guralnick [25]. We also refer the reader to the research [7], especially to Section 4.4, where the author constructed cubic invariant forms for the group scheme $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n$.

2.1. **Stabilizer of the Plücker ideal.** First we recall all the main results of the paper [93], since we use them to calculate the normalizer. Plücker polynomials are homogeneous quadratic polynomials $f_{I,J} \in R[x_H]_{H \in \bigwedge^m [n]}$ of Grassmann coordinates x_H. In general, Plücker polynomials can be represented in the form:

$$f_{I,J} = \sum_{j \in J \setminus I} \pm x_{I \cup \{j\}} x_{J \setminus \{j\}},$$

where $I \in \bigwedge^{m-1}[n]$ and $J \in \bigwedge^{m+1}[n]$. To clarify the sign of the factors, we extend the definition of Grassmann coordinates as follows. If there are identical numbers among the set $i_1, \dots, i_m$, then $x_{i_1 \dots i_m} = 0$, otherwise $x_{i_1 \dots i_m} = \mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_m) x_{\{i_1 \dots i_m\}}$. Thus Plücker polynomials are

$$f_{I,J} = \sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h x_{i_1 \dots i_{m-1} j_h} x_{j_1 \dots \widehat{j_h} \dots j_{m+1}}.$$

A Plücker ideal $\mathrm{Plu} = \mathrm{Plu}_{n,m} \trianglelefteq R\left[x_I : I \in \bigwedge^m [n]\right]$ is generated by all Plücker relations $f_{I,J} = 0$.

In the sequel, we use the language of weight diagrams to illustrate internal combinatorics of equations. We refer the reader to the wonderful paper [65], where the authors described all the rules to construct weight diagrams in detail. The exterior power of the elementary group $\bigwedge^m E_n(R)$ corresponds to the representation of the Chevalley group of type $\Phi = A_{n-1}$ with the highest weight ϖ_m. The weight diagram in this case is constructed according to Pascal's triangle. We always use two basic examples $\bigwedge^2 E_5(R)$ and $\bigwedge^3 E_7(R)$. The weight diagram of the first group is the half square on four vertices, see fig. 1. For $\bigwedge^3 E_7(R)$ the weight diagram looks more complicated, see fig. 2.

Below we show the group $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ to be an analogue of the standard Chevalley group $G(\Phi, R)$, whereas $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ to correspond to the extended Chevalley group $\overline{G}(\Phi, R)$. The [absolute] elementary subgroup of $G(\Phi, R)$ is $\bigwedge^m E_n(R)$. In the majority of the existing constructions, $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ arises together with an action on the Weyl module $V(\varpi_m) = R^N$. Let $\Lambda(\varpi_m)$ be the weight set of the module $V(\varpi_m)$. Our representation is minuscule, in particular

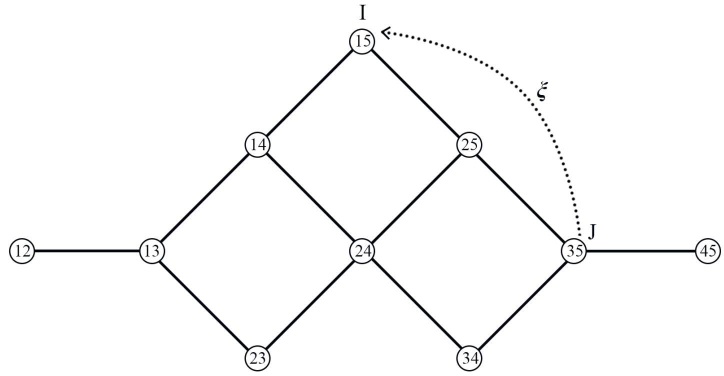

Figure 1: Weight diagram (A_4, ϖ_2) and action $t_{I,J}(\xi)$

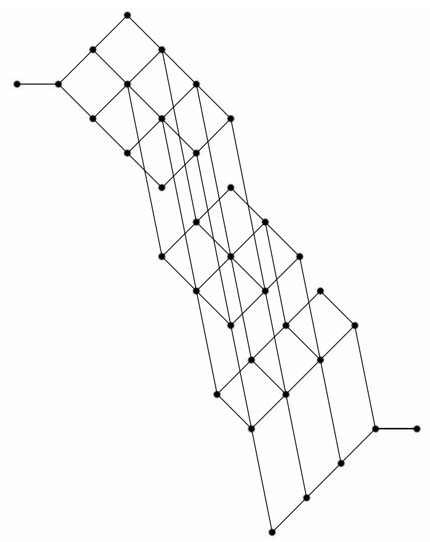

Figure 2: Weight diagram (A_6, ϖ_3)

the multiplicities of all weights equal 1. As above, $\Lambda(\varpi_m) = \bigwedge^m[n]$, i. e., all indices $\lambda = I \in \bigwedge^m[n]$ are weights of the representation. Fix an admissible base $v^\lambda, \lambda \in \Lambda$ of the module $V = V(\varpi_m)$. We conceive a vector $a \in V$, $a = \sum v^\lambda a_\lambda$, as a column of coordinates $a = (a_\lambda), \lambda \in \Lambda$.

In fig. 1 we reproduce the weight diagram of the representation (A_4, ϖ_2) together with the natural numbering of weights[1], used in the sequel. The highest weight is the leftmost one. Recall that in a weight diagram two weights are joined by an edge if their difference is a fundamental root α of A_{n-1}.

Lemma 17. *Let* R *be an arbitrary commutative ring. The group* $\bigwedge^m E_n(R)$ *preserves the Plücker ideal* Plu.

Further, following notation of the paper [93], put $G_{nm}(R) := \mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu})$ for any commutative

[1] all weights are ordered in ascending order

ring R, where $\mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu})$ is the set of R-linear transformations preserving the ideal Plu:

$$\mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu}) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid f(gx) \in \mathrm{Plu} \text{ for all } f \in \mathrm{Plu}\}.$$

Lemma 18. *For any n, m the functor $R \mapsto \mathrm{Fix}_R(\mathrm{Plu})$ is an affine group scheme defined over $\mathbb{Z}$.*

Next results are classical known, see [14] and [100, Theorem 4]. Moreover, for the exterior powers these results are mentioned in the paper [93]. Note that our representation $\bigwedge^m$ is minuscule. It follows that it is irreducible and tensor indecomposable.

Lemma 19. *Let K be an algebraically closed field. For any n, m with $1 \leqslant m \leqslant n-1$, the kernel of $\bigwedge^m$ for $\mathrm{GL}_n(K)$ and for $\mathrm{SL}_n(K)$ equals μ_m and μ_d, where $d = \gcd(n, m)$, respectively.*

Lemma 20. *As a subgroup of $\mathrm{GL}_N(K)$ the algebraic group $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(K)\big)$ is irreducible and tensor indecomposable. Moreover, except the case $n = 2m \geqslant 4$, the group $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(K)\big)$ coincides with its normalizer. In the exceptional case of the half dimension this group has index 2 in its normalizer. The same is true for the algebraic group $\bigwedge^m\big(\mathrm{SL}_n(K)\big)$ as a subgroup of $\mathrm{SL}_N(K)$.*

Using the classification of maximal subgroups in classical groups by Gary Seitz [69, Table 1] (see also the survey [13] with corrections), it is easy to prove that $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$ is maximal for an algebraically closed field K. The following statement is Lemma 7 of the paper [93].

Lemma 21. *Let K be an algebraically closed field. For any n, m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$ the groups $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ and $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$ are maximal among connected closed subgroups in one of the following groups:*

$\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$:

- *in* $\mathrm{GL}_N(K)$, *if* $n \neq 2m$;
- *in* $\mathrm{GSp}_N(K)$, *if* $n = 2m$ & *odd* m;
- *in* $\mathrm{GO}^0_N(K)$, *if* $n = 2m$ & *even* m.

$\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$:

- *in* $\mathrm{SL}_N(K)$, *if* $n \neq 2m$;
- *in* $\mathrm{Sp}_N(K)$, *if* $n = 2m$ & *odd* m;
- *in* $\mathrm{SO}_N(K)$, *if* $n = 2m$ & *even* m.

Besides, in the exceptional cases these classical groups are unique proper connected overgroups of $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ and $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(K)$, respectively.

Corollary 22. *Suppose K is an algebraically closed field; then $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) = G^0_{nm}(K)$.*

Finally, for the coincidence of the group schemes we must prove that G_{nm} is smooth or, what is essentially the same, to calculate the dimension of the Lie algebra $\mathrm{Lie}(G_{nm})$.

Lemma 23. *For any field K the dimension of the Lie algebra $\mathrm{Lie}(G_{nm,K})$ does not exceed n^2.*

Using Theorem 1.6.1 of [99], we get the following result.

Theorem 24. *For any $n, m, 1 \leqslant m \leqslant n-1$ there is an isomorphism of affine groups schemes over $\mathbb{Z}$:*

$$G_{nm} \cong \begin{cases} \mathrm{GL}_n / \mu_m, & \text{if } n \neq 2m, \\ \mathrm{GL}_n / \mu_m \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{if } n = 2m. \end{cases}$$

2.2. **Exterior powers as a stabilizer of invariant forms I.** In this section, we assume that $2 \in R^*$ and $n \geqslant 2m$ due to the isomorphism $\bigwedge^m V^* \cong (\bigwedge^{\dim(V)-m} V)^*$ for an arbitrary free R-module V. The goal of this section is to represent the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ as a stabilizer group for some set of (symmetric or skew-symmetric) polynomials. The following theorem is classically known and can be found in [18, Chapter 2, Sections 5–7].

Proposition 25. *Let K be an algebraically closed field. Then $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ is a group of similarities of an invariant form only in the case $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. Moreover, this form is unique and equal to*

- $q^m_{[n]}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \ldots, I_{\frac{n}{m}})\, x_{I_1} \ldots x_{I_{\frac{n}{m}}}$ *for even* m;
- $q^m_{[n]}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \ldots, I_{\frac{n}{m}})\, x_{I_1} \wedge \ldots \wedge x_{I_{\frac{n}{m}}}$ *for odd* m,

where the sums in the both cases range over all unordered partitions of the set $[n]$ into m-element subsets $I_1, \ldots, I_{\frac{n}{m}}$.

Thus $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ is isomorphic to the group of matrices $g \in \mathrm{GL}_N(K)$ for which there is a multiplier $\lambda \in R^*$ such that $q^m_{[n]}(gx) = \lambda(g) q^m_{[n]}(x)$ for all $x \in K^N$, where K is an algebraically closed field. Obviously, $\lambda(g)$ is a one-dimensional representation of the group $\mathrm{GL}_n(K)$. Therefore $\lambda = \det^{\otimes l} \colon g \mapsto \det^l(g)$. To evaluate the power of the determinant, we calculate $\lambda(g)$ for the diagonal matrix $d_i(\xi) \in \mathrm{GL}_n(K)$. Thus $q^m_{[n]}(\bigwedge^m d_i(\xi) \cdot x) = \xi q^m_{[n]}(x)$. This implies that $\lambda(g) = \det(g)$.

In the sequel, we use the uniform notation $q(x)$ for these forms. This cannot lead to a confusion as we always can distinguish between two different meanings of $q(x)$ by the power m. First note that these forms are the only possible ones for the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Further, the coefficients equal ± 1, so they are defined over $\mathbb{Z}$. Then by direct calculations we get

$$q(\textstyle\bigwedge^m g \cdot x) = \det(g) \cdot q(x) \text{ for any } g \in \mathrm{GL}_n(R).$$

Thus we can assume these forms to be invariant under the action $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, where R is a commutative ring.

In the rest, we assume that m is even for the sake of brevity. However if results are different for even and odd m, we pay attention. Now for the form $q(x)$ we introduce a [full] *polarization*.

Put $k := \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. Define a k-linear form $f_{n,m}$:

$$f^m_{[n]}(x^1, \dots, x^k) = \sum \operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k)\, x^1_{I_1} \dots x^k_{I_k},$$

where the sum ranges over all *ordered* partitions of the set $[n]$ into m-element subsets. For odd m the form $f^m_{[n]}(x^1, \dots, x^k)$ is set similarly. Again, we denote these forms by the uniform symbol $f(x^1, \dots, x^k)$. We focus on ordered partitions in this sum, unlike unordered ones in $q(x)$.

Proposition 26. *Let R be an arbitrary commutative ring. If $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, then the form f is invariant under the action of $\bigwedge^m E_n(R)$. In addition, the form f is multiplied by ξ under the action of a weight element $\bigwedge^m d_i(\xi)$.*

Proof. First note that for rings the multiplier $\lambda(g)$ equals the determinant too. Indeed, $\lambda(g)$ is a one-dimensional representation, i., e., is a homomorphism $GL_n(R) \longrightarrow GL_1(R)$. Moreover, $\lambda(g)$ is a polynomial map that equals the determinant of g over $\mathbb{C}$. Thus $\lambda(g) = \det(g)$ for an arbitrary ring R. And then the statement is obvious. But below we prove the proposition by direct calculation.

Show that $f(gx^1, \dots, gx^k) = \xi f(x^1, \dots, x^k)$, where $g = \bigwedge^m d_i(\xi)$. Since $I_1, \dots, I_k$ is a partition of the set $[n]$, we get that in every monomial $x^1_{I_1} \dots x^k_{I_k}$ of the form f, the number i belongs to only one variable $x^l_{I_l}$. Thus every monomial of $f(gx^1, \dots, gx^k)$ has the form $\pm x^1_{I_1} \dots x^{l-1}_{I_{l-1}} \xi x^l_{I_l} x^{l+1}_{I_{l+1}} \dots x^k_{I_k}$.

Now let $g = \bigwedge^m t_{i,j}(\xi)$. By (1) the matrix g equals the product of transvections $t_{iL,jL}(\operatorname{sgn}(i,L)\operatorname{sgn}(j,L)\xi)$ for all $L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]$. Hence in the vector $gx, x \in R^N$ exactly $\binom{n-2}{m-1}$ coordinates change: $(gx)_{iL} = x_{iL} + \operatorname{sgn}(i,L)\operatorname{sgn}(j,L)\xi x_{jL}$. Then in the form $f(gx^1, \dots, gx^k) - f(x^1, \dots, x^k)$ all monomials have the form

$$\pm x^1_{I_1} \dots x^{l-1}_{I_{l-1}} \left(\operatorname{sgn}(i,L)\operatorname{sgn}(j,L)\xi x^l_{jL}\right) x^{l+1}_{I_{l+1}} \dots x^k_{I_k},$$

where $I_l = iL$, $L \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]$. Let $I_1, \dots, I_k$ be a partition of $[n]$, where $I_l = iL_1$, $I_p = jL_2$, $L_1, L_2 \in \bigwedge^{m-1}[n \setminus \{i,j\}]$. Then the indices $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k$, where $\tilde{I}_l = jL_1$, $\tilde{I}_p = iL_2$ are a partition of $[n]$ too. Therefore the sum of the corresponding monomials equals

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k) x^1_{I_1} \dots x^p_{jL_2} \dots x^{l-1}_{I_{l-1}} \left(\operatorname{sgn}(i,L_1)\operatorname{sgn}(j,L_1)\xi x^l_{jL_1}\right) x^{l+1}_{I_{l+1}} \dots x^k_{I_k} +\\ &\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k) x^1_{\tilde{I}_1} \dots x^l_{jL_1} \dots x^{l-1}_{\tilde{I}_{l-1}} \left(\operatorname{sgn}(i,L_2)\operatorname{sgn}(j,L_2)\xi x^p_{jL_2}\right) x^{l+1}_{\tilde{I}_{l+1}} \dots x^k_{\tilde{I}_k}\end{aligned}$$

It remains to check that the corresponding signs are opposite:

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k)\operatorname{sgn}(i,L_1)\operatorname{sgn}(j,L_1) = -\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)\operatorname{sgn}(i,L_2)\operatorname{sgn}(j,L_2).$$

Multiplying this equality by $\operatorname{sgn}(j,L_2)\operatorname{sgn}(j,L_1)$, we obtain

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k)\operatorname{sgn}(i,L_1)\operatorname{sgn}(j,L_2) = -\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)\operatorname{sgn}(i,L_2)\operatorname{sgn}(j,L_1).$$

And this is equivalent to

$$\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_k) = -\operatorname{sgn}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k),$$

where the indices $I_p, \tilde{I}_p$ and $I_l, \tilde{I}_l$ are unordered.

If m is even, then this equality is equivalent to $\operatorname{sgn}(iL_1, jL_2) = -\operatorname{sgn}(jL_1, iL_2)$. Since iL_1, jL_2 and jL_1, iL_2 differ by an odd number of transpositions, the signs are opposite. Similarly, $I_1, \dots, I_k$ and $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k$ differ by an odd number of transpositions for odd m. □

Let us define a group $G_f(R)$ as the group of linear transformations preserving the form $f(x^1, \dots, x^k)$:

$$G_f(R) := \{g \in GL_N(R) \mid f(gx^1, \dots, gx^k) = f(x^1, \dots, x^k) \text{ for all } x^1, \dots, x^k \in R^N\}.$$

It is an analogue of the Chevalley group for the exterior powers. The extended Chevalley group satisfies similarities of $f(x^1, \dots, x^k)$:

$$\begin{aligned}\overline{G}_f(R) := \{g \in GL_N(R) \mid \ &\text{there exists } \lambda \in R^* \text{ such that}\\ &f(gx^1, \dots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \dots, x^k) \text{ for all } x^1, \dots, x^k \in R^N\}.\end{aligned}$$

Obviously, the functors $R \mapsto \overline{G}_f(R)$ and $R \mapsto G_f(R)$ define affine group schemes over $\mathbb{Z}$. Thus in the case $k := \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$ we can expect the group $\bigwedge^m GL_n(R)$ to coincide with $\overline{G}_f(R)$ and $\bigwedge^m SL_n(R)$ to coincide with $G_f(R)$. This is almost true and the following theorem gives a precise answer.

Theorem 27. *Suppose $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$; then $\bigwedge^m GL_n(R)$ coincides with $\overline{G}_f(R)$ except the case of the half dimension. Namely, if $n = 2m$, then $\overline{G}_f(R) = GO_N(R)$ or $GSp_N(R)$ depending on the parity of m. So in this case $\bigwedge^m GL_n(R)$ is a subgroup of the orthogonal or the symplectic group, respectively. The same is true for $\bigwedge^m SL_n(R)$ and $G_f(R)$.*

Remark 28. If $(n, m) = (4, 2)$, then the stabilizer equals $GO_6(R)$. And it also coincides with $\bigwedge^2 GL_4(R)$.

The proof uses the following lemma,[2] which is Theorem 1.6.1 of [99]. This result essentially reduces the verification of the isomorphism of affine group schemes to the isomorphism of their groups of points over algebraically closed fields and the dual numbers over such fields. Recall that the algebra $K[\delta]$ of dual numbers over a field is isomorphic as a K-module to $K \oplus K\delta$, with multiplication given by $\delta^2 = 0$.

Lemma 29. *Let G and H be affine group schemes of finite type over $\mathbb{Z}$, where G is flat, and let $\phi\colon G \longrightarrow H$ be a morphism of group schemes. Assume that the following conditions are satisfied for any algebraically closed field K :*

(1) $\dim(G_K) \geqslant \dim_K(\mathrm{Lie}(H_K))$,

[2]Similarly, the statement can be proved using SGA, Exp. VI_b, Cor. 2.6

(2) ϕ *induces monomorphisms of the groups of points* $G(K) \longrightarrow H(K)$ *and* $G(K[\delta]) \longrightarrow H(K[\delta])$,

(3) *the normalizer* $\phi(G^0(K))$ *in* $H(K)$ *is contained in* $\phi(G(K))$.

Then ϕ *is an isomorphism of group schemes over* $\mathbb{Z}$.

Here G^0 denotes the connected component of the identity in G, G_K denotes the scheme obtained from G by a change of scalars, and $\mathrm{Lie}(H_K)$ denotes the Lie algebra of the scheme H_K. Observe that in our case the preliminary assumptions on the schemes are satisfied automatically. All considered schemes are of finite type being subschemes of appropriate GL_n. Flatness follows from the fact that G is connected. For the scheme G^0 all reductions schemes G^0_K are smooth connected schemes of the same dimension. Moreover, in the previous subsection we showed that the normalizer of $\bigwedge^m GL_n(K)$ in $GL_N(K)$ coincides with $\bigwedge^m GL_n(K)$. Thus we only must verify the first two conditions of the lemma.

Proposition 30. *Suppose* K *is an algebraically closed field and* $n \neq 2m$*; then*

$$\textstyle\bigwedge^m GL_n(K) = \overline{G}_f^0(K) \qquad \textit{and} \qquad \bigwedge^m SL_n(K) = G_f(K).$$

Proof. The group $\bigwedge^m GL_n(K)$ preserves the invariant form $f(x^1, \dots, x^k)$ by Proposition 25, thus $\bigwedge^m GL_n(K) \leqslant \overline{G}_f(K)$. Since $\bigwedge^m GL_n(K)$ is connected, we have $\bigwedge^m GL_n(K) \leqslant \overline{G}_f^0(K)$. Further, from Lemma 21 it follows that $\bigwedge^m GL_n(K)$ is maximal among connected closed subgroups in $GL_N(K)$. Since $\overline{G}_f(K)$ is a proper subgroup of $GL_N(K)$, we obtain the reverse inclusion. For the group $\bigwedge^m SL_n(K)$ the proof is similar. □

It only remains to evaluate the dimension of the Lie algebras $\overline{G}_f$ and G_f. First let us recall how the Lie algebra of the scheme G_{nm} is defined, see §2.1. We follow the paper by William Waterhouse [99], where such similar calculations were performed in Lemmas 3.2, 5.3, and 6.3. Let K be an arbitrary field. Then Lie algebra $\mathrm{Lie}((G_f)_K)$ of an affine group scheme $(G_f)_K$ is most naturally interpreted as the kernel of the homomorphism $G_f(K[\delta]) \longrightarrow G_f(K)$, sending δ to 0, see [8; 34; 35; 101]. Let G be a subscheme of GL_n. Then $\mathrm{Lie}(G_K)$ consists of all matrices of the form $e + z\delta$, where $z \in M_n(K)$, satisfying the equations defining $G(K)$. In the following lemma we specialize this statement in the case where G is a stabilizer of a system of polynomials.

Lemma 31. *Let* $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_t]$*. Then a matrix* $e + z\delta$*, where* $z \in M_t(K)$ *belongs to* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Fix}_K(f_1, \dots, f_s))$ *if and only if*

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant t} z_{ij} x_i \frac{\partial f_h}{\partial x_j} = 0$$

for all $h = 1, \dots, s$.

We apply this lemma to the case of the stabilizer of Plücker polynomials $f_{K,L}(x)$, where $K \in \bigwedge^{m-1}[n]$, $L \in \bigwedge^{m+1}[n]$. There are three types of equations on entries $z_{I,J}$, see, for instance, the proof of Proposition 3 in [93]. Here by $\triangle$ we denote the symmetric difference of two sets.

- If $d(I,J) \leqslant m-2$, which corresponds to the case $|I \cup J| \geqslant m+2$, then $z_{I,J} = 0$.
- If $d(I,J) = d(M,H) = m-1$ and $I \triangle J = H \triangle M$, then $z_{I,J} = \pm z_{H,M}$.
- Finally, if $d(I,J) = d(M,H) = m-1$ and $I \triangle H = J \triangle M$, then $z_{I,I} \pm z_{H,H} = \pm z_{J,J} \pm z_{M,M}$.

The first item do not contribute to the dimension of the Lie algebra. The matrix entries $z_{I,J}$ from the second item give the contribution $n(n-1)$, whereas the latter item contributes no more than n linearly independent variables.

We pass to the schemes $G_f(K)$ and $\overline{G}_f(K)$. The Lie algebra $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ consists of the matrices $g = e + y\delta$, where $y \in M_N(K)$, satisfying the condition $f(gx^1, \dots, gx^k) = f(x^1, \dots, x^k)$ for all $x^1, \dots, x^k \in K^N$. Similarly, $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ consists of all matrices $g = e + y\delta$, where $y \in M_N(K)$, satisfying the condition $f(gx^1, \dots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \dots, x^k)$ for all $x^1, \dots, x^k \in K^N$.

Theorem 32. *If* $n \neq 2m$*, then for any field* K *the dimension of the Lie algebra* $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ *does not exceed* n^2*, whereas the dimension of the Lie algebra* $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ *does not exceed* $n^2 - 1$.

Proof. First observe that the conditions on elements of the Lie algebra $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ are obtained from the corresponding conditions for elements of $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ by substituting $\lambda(g) = 1$. Let g be a matrix satisfying the above conditions for all $x^1, \dots, x^k \in K^N$. Plugging in $g = e + y\delta$ and using that the form f is k-linear, we get

$$\delta\Big(f(yx^1, x^2, \dots, x^k) + \dots + f(x^1, \dots, x^{k-1}, yx^k)\Big) = (\lambda(g) - 1) f(x^1, \dots, x^k).$$

Now we show that the entries of the matrix y are subject to exactly the same linear dependencies, as in the case G_{nm}. By definition $f(e_{I_1}, \dots, e_{I_k}) = 0$ for all indices $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$, except the cases, where $\{I_j\}$ is a partition of the set $[n] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$.

- If $d(I,J) \leqslant m-2$, then $y_{I,J} = 0$. Indeed, in this case then there is a set of pairwise disjoint indices $I_2, \dots, I_k \in \bigwedge^m\Big([n] \setminus I\Big)$ such that $d(J, I_2) = d(J, I_3) = 1$ and $d(J, I_4) = \dots = d(J, I_k) = 0$. Put $x^1 := e_J, x^l := e_{I_l}, 2 \leqslant l \leqslant k$. Then $f(x^1, yx^2, \dots, x^k) = \dots = f(x^1, x^2, \dots, yx^k) = 0$. It follows that $f(yx^1, x^2, \dots, x^k) = \pm y_{I,J} = 0$.
- If $d(I,J) = m-1$ and $I \triangle J = H \triangle M$, then $y_{I,J} = \pm y_{H,M}$. Here there is a set of pairwise disjoint indices $M, I_3, \dots, I_k \in \bigwedge^m\Big([n] \setminus I\Big)$ such that $d(J, M) = 1$ and $d(J, I_3) = \dots = d(J, I_k) = 0$. Put $x^1 := e_J, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}, 3 \leqslant l \leqslant k$ and denote by H the index $[n] \setminus (J \cup I_2 \cup \dots \cup I_k)$. Then $f(x^1, x^2, yx^3, \dots, x^k) = \dots = f(x^1, x^2, \dots, yx^k) = 0$. It follows that $f(yx^1, x^2, \dots, x^k) + f(x^1, yx^2, x^3 \dots, x^k) = 0$. But $f(yx^1, x^2, \dots, x^k) = \mathrm{sgn}(I, M, I_3, \dots, I_k) \cdot y_{I,J}$, and $f(x^1, yx^2, x^3, \dots, x^k) = \mathrm{sgn}(J, H, I_3, \dots, I_k) \cdot y_{H,M}$.
- Finally, if $d(I,M) = m-1$ and $I \triangle M = H \triangle J$, then $y_{I,I} - y_{M,M} = y_{H,H} - y_{J,J}$. Indeed,

there is a set of pairwise disjoint indices $I_3, \dots, I_k \in \bigwedge^m\big([n] \setminus (I \cup J)\big)$. In other words, $I, J, I_3, \dots, I_k$ is a partition of the set $[n]$. Put $x^1 := e_I, x^2 := e_J, x^l := e_{I_l}$, where $3 \leqslant l \leqslant k$. Then

$$(\lambda(g) - 1) = \delta(y_{I,I} + y_{J,J} + y_{I_3,I_3} + \dots + y_{I_k,I_k}).$$

On the other hand, $H, M, I_3, \dots, I_k$ is a partition of $[n]$ too, where $I \cup J = H \cup M$. Substituting $x^1 := e_H, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}$ for all $3 \leqslant l \leqslant k$, we get

$$(\lambda(g) - 1) = \delta(y_{M,M} + y_{H,H} + y_{I_3,I_3} + \dots + y_{I_k,I_k}).$$

Combining the obtained equalities, we see $y_{I,I} + y_{J,J} = y_{M,M} + y_{H,H}$.

Therefore the obtained relations are the same as the relations in the previous lemma. The matrix entries $y_{I,J} = 0$ with $d(I, J) \leqslant m - 2$ do not contribute to the dimension of the Lie algebra. The entries $y_{I,J}$ with $d(I, J) = m-1$ give the contribution equal to the number of roots of Φ, namely, $(n^2 - n)$. Finally, the latter item allows us to express all entries $y_{I,I}$ as linear combinations of the entries y_{K_j,K_j}, $1 \leqslant j \leqslant n$, where each fundamental root of Φ occurs among the pairwise differences of the weights K_j. For instance, one can use the weights $\{1, \dots, m-1, p\}$, where $m \leqslant p \leqslant n$ and $\{1, \dots, \hat{i}, \dots, m+1\}$, where $1 \leqslant i < m$, see [93]. Fig. 3 shows their location in the weight diagram (A_5, ϖ_2). Therefore the dimension of the Lie algebra $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ does not exceed $n^2 - n + n = n^2$. The same arguments are also applicable for the case of $\mathrm{Lie}(G_f(K))$. It suffices to set $\lambda(g) = 1$. Again, we conclude that the dimension of $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ does not exceed n^2.

To conclude the proof of the theorem, we must reduce the dimension of $\mathrm{Lie}(G_f(K))$. For the sake of brevity, we conceive indices $I \in \bigwedge^m[n]$ as roots of the corresponding representation, and we write roots $\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_{n-1}\alpha_{n-1} \in A_{n-1}$ in the Dynkin form $c_1 \dots c_{n-1}$, where α_j are the simple roots of A_{n-1}. For example, $\delta = 1 \dots 1$ is the maximal root of A_{n-1}. Suppose K_1 is the highest weight of the representation, and $I_2, \dots, I_k$ is the standard partition of the set $[n] \setminus K_1$ into m-element subsets, i. e., $I_2 > I_3 > \dots > I_k$. Substituting $x^1 := e_{K_1}, x^2 := e_{I_2}, \dots, x^k := e_{K_k}$, we get

$$y_{K_1,K_1} + y_{I_2,I_2} + \dots + y_{I_k,I_k} = 0.$$

Further, note that for every j: $K_1 - I_j = c_1^j\alpha_1 + \dots + c_{n-1}^j\alpha_{n-1}$. Using already proven relations $y_{I,I} - y_{M,M} = y_{H,H} - y_{J,J}$ for $I - M = H - J$, express all diagonal entries y_{I_j,I_j} as linear combinations of the entries y_{K_j,K_j}. Thus we find a non-trivial relation among y_{K_j,K_j}. Below we do this for arbitrary exterior power in detail.

In this notation, $K_1 - I_2 = 12 \dots m \dots 210 \dots 0$, $K_1 - I_3 = 12 \dots \underbrace{m \dots m}_{m+1 \text{ times}} \dots 210 \dots 0$, and in general $K_1 - I_j = 12 \dots \underbrace{m \dots m}_{(j-2)\cdot m+1} \dots 21\underbrace{0 \dots 0}_{n-mj}$ for $2 \leqslant j \leqslant k$. Recall that our numbering of the roots K_j is such that $\alpha_m = K_1 - K_2, \alpha_{m+1} = K_2 - K_3, \dots, \alpha_{n-1} = K_{n-m} - K_{n-m+1}, \alpha_{m-1} =$

K_2-K_{n-m+2}, $\alpha_{m-2}=K_{n-m+2}-K_{n-m+3},\dots,\alpha_1=K_{n-1}-K_n$ (for the exterior squares $\alpha_{m-1}=\alpha_1=K_2-K_{n-m+2}$). Then for $3\leqslant j\leqslant k$, we have

$$\begin{aligned}
y_{K_1,K_1}-y_{I_j,I_j}&=(y_{K_{n-1},K_{n-1}}-y_{K_n,K_n})+2(y_{K_{n-2},K_{n-2}}-y_{K_{n-1},K_{n-1}})+\dots\\
&\quad+(m-1)(y_{K_2,K_2}-y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}})\\
&\quad+m\Big((y_{K_1,K_1}-y_{K_2,K_2})+\dots+(y_{K_{m(j-2)+1},K_{m(j-2)+1}}-y_{K_{m(j-2)+2},K_{m(j-2)+2}})\Big)\\
&\quad+(m-1)(y_{K_{m(j-2)+2},K_{m(j-2)+2}}-y_{K_{m(j-2)+3},K_{m(j-2)+3}})+\dots\\
&\quad+2(y_{K_{m(j-1)-1},K_{m(j-1)-1}}-y_{K_{m(j-1)},K_{m(j-1)}})+(y_{K_{m(j-1)},K_{m(j-1)}}-y_{K_{m(j-1)+1},K_{m(j-1)+1}})\\
&=my_{K_1,K_1}+(m-1)y_{K_2,K_2}-y_{K_{m(j-2)+2},K_{m(j-2)+2}}-\dots-y_{K_{m(j-1)+1},K_{m(j-1)+1}}\\
&\quad-y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}}-\dots-y_{K_n,K_n},
\end{aligned}$$

and for $j=2$, we have

$$\begin{aligned}
y_{K_1,K_1}-y_{I_2,I_2}&=(y_{K_{n-1},K_{n-1}}-y_{K_n,K_n})+2(y_{K_{n-2},K_{n-2}}-y_{K_{n-1},K_{n-1}})+\dots\\
&\quad+(m-1)(y_{K_2,K_2}-y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}})\\
&\quad+m(y_{K_1,K_1}-y_{K_2,K_2})\\
&\quad+(m-1)(y_{K_2,K_2}-y_{K_3,K_3})+\dots\\
&\quad+2(y_{K_{m-1},K_{m-1}}-y_{K_m,K_m})+(y_{K_m,K_m}-y_{K_{m+1},K_{m+1}})\\
&=my_{K_1,K_1}+(m-2)y_{K_2,K_2}-y_{K_3,K_3}-\dots-y_{K_{m+1},K_{m+1}}\\
&\quad-y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}}-\dots-y_{K_n,K_n}.
\end{aligned}$$

It remains to add up all the obtained equalities with the equation $y_{K_1,K_1}+y_{I_2,I_2}+\dots+y_{I_k,I_k}=0$. Thus the final equation on diagonal entries is the following

$$\begin{aligned}
(m(k-1)-k)y_{K_1,K_1}+\Big((m-1)(k-1)-1\Big)y_{K_2,K_2}-y_{K_3,K_3}-\dots-y_{K_{n-m+1},K_{n-m+1}}&\\
-(k-1)y_{K_{n-m+2},K_{n-m+2}}-\dots-(k-1)y_{K_n,K_n}&=0.
\end{aligned}$$

This is precisely the desired non-trivial linear relation among the entries y_{K_j,K_j}, which, over a field of any characteristic, shows that the dimension of our Lie algebra is 1 smaller than the above bound. Thus $\dim\mathrm{Lie}(G_f(K))\leqslant n^2-1$, as claimed. $\square$

Let us give an example of latter calculations for $\bigwedge^2 E_6(R)$. Fig. 3 shows the location of K_j in the weight diagram. From the condition of preserving the form, we have $y_{12,12}+y_{34,34}+y_{56,56}=0$.

- Since $12-34=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$, it follow that

$$\begin{aligned}
y_{12,12}-y_{34,34}&=(y_{13,13}-y_{23,23})+2(y_{12,12}-y_{13,13})+(y_{13,13}-y_{14,14})\\
&=2y_{12,12}-y_{14,14}-y_{23,23}.
\end{aligned}$$

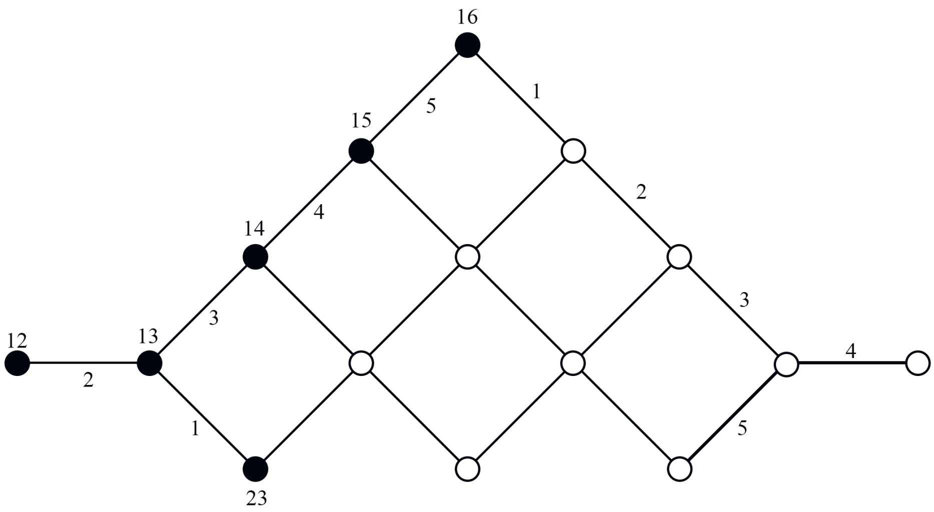

Figure 3: Diagonal weights in (A_5, ϖ_2)

- And since $12 - 56 = \alpha_1 + 2(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_5$, we have

$$
\begin{aligned}
y_{12,12} - y_{56,56} = (y_{13,13} - y_{23,23}) + 2\Big((y_{12,12} - y_{13,13}) \\
+ (y_{13,13} - y_{14,14}) + (y_{14,14} - y_{15,15})\Big) + (y_{15,15} - y_{16,16}) \\
= 2y_{12,12} + y_{13,13} - y_{15,15} - y_{16,16} - y_{23,23}.
\end{aligned}
$$

Thus adding up these three equations, we get a non-trivial linear relation among the entries y_{K_j,K_j}:

$$y_{12,12} + y_{13,13} - y_{14,14} - y_{15,15} - y_{16,16} - 2y_{23,23} = 0.$$

Now we verified all the conditions from Lemma 29 and are ready to complete the proof of Theorem 27.

Theorem 33. *If $n \neq 2m$, then there are isomorphisms $\overline{G}_f \cong \bigwedge^m \mathrm{GL}_n$, $G_f \cong \bigwedge^m \mathrm{SL}_n$ of affine groups schemes over $\mathbb{Z}$.*

Proof. Consider the rational representation of algebraic groups

$$\textstyle\bigwedge^m \colon \mathrm{GL}_n(\_) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\_).$$

From Lemma 19, it follows that the kernel of this morphism equals μ_m. Proposition 26 implies that its image is contained in $\overline{G}_f$. Hence $\bigwedge^m$ induce a monomorphism of algebraic groups

$$\phi\colon \mathrm{GL}_n / \mu_m \longrightarrow \overline{G}_f.$$

We wish to apply to this morphism ϕ Lemma 29. Obviously, for an algebraically closed field K $\dim(\bigwedge^m \mathrm{GL}_{n,K}) = n^2$, and Theorem 32 implies that $\dim(\mathrm{Lie}(\overline{G}_{f,K})) \leqslant n^2$. Therefore Condition 1 of Lemma 29 holds. As we mention above, Condition 3 of Lemma 29 also holds. This means that we can apply Lemma 29 to conclude that ϕ establishes an isomorphism of $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ and $\overline{G}_f(\_)$ as affine group schemes over $\mathbb{Z}$. For the scheme G_f the proof is similar. $\square$

This isomorphism guarantees that for arbitrary rings the class of transvections from $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ is strictly larger than the images of $\bigwedge^m g$, where $g \in \mathrm{GL}_n(R)$. Indeed, suppose $n \neq 2m$ (otherwise, one has to consider the arguments for the corresponding connected component of the group). Then the exact sequence of affine group schemes

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n / \mu_m \longrightarrow 1$$

gives an exact sequence of Galois cohomology

$$1 \longrightarrow \mu_m(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n / \mu_m(R) \longrightarrow H^1(R, \mu_m) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n / \mu_m).$$

The values of all these cohomology sets are well known, see [40, Chapter III, §2] or [93, §9], in particular for the exterior square also see [99]. $H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ classifies projective R-modules P of rank n, in particular, $H^1(R, \mathrm{GL}_1)$ classifies invertible R-modules, i. e., finitely generated projective R-modules of rank 1. The set $H^1(R, \mathrm{GL}_1)$ has a group structure induced by a tensor product. This group is called the Picard group $\mathrm{Pic}(R)$ of the ring R. Its elements are twisted forms of the free R-module R. Let us consider the following exact sequence for description of $H^1(R, \mu_m)$

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_1 \xrightarrow{(\_)^m} \mathrm{GL}_1 \longrightarrow 1,$$

where $(\_)^m$ is exponentiation. Since $(\mathrm{GL}_1)^m(R) = R^{*m}$, we have

$$1 \longrightarrow R/R^{*m} \longrightarrow H^1(R, \mu_m) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R),$$

where the rightmost arrow is induced by $(\_)^m$. Thus the cohomology group $H^1(R, \mu_m)$ classifies projective R-modules P of rank 1 together with the isomorphism $P^{\otimes m} = R$. To describe the group $\mathrm{GL}_n/\mu_m(R)$ it remains to calculate the kernel of $H^1(R, \mu_m) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n)$. Observe that the morphism $\mu_m \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ passes through $\mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$:

$$\begin{tikzcd}
\mu_m \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{GL}_n \\
& \mathrm{GL}_1 \arrow[ur, hook, "\text{scalar}"'] &
\end{tikzcd}$$

Since $H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ classifies projective R-modules of rank n and the embedding $\mathrm{GL}_1 \hookrightarrow \mathrm{GL}_n$ sends λ to λe, we see that the map $H^1(R, \mathrm{GL}_1) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ sends an invertible module P to $\bigoplus_1^n P$. It follow that the kernel of $H^1(R, \mu_m) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{GL}_n)$ contains the whole group R^*/R^{*m} and, in addition, elements P of the Picard group $\mathrm{Pic}(R)$ such that $P^{\otimes m} = R$ and $\bigoplus_1^n P$ is free $(= R^n)$.

Summarizing we see that the quotient group of $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ modulo $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ contains a copy of the group R^*/R^{*m}, and the further quotient modulo this copy is a subgroup of the Picard group $\mathrm{Pic}(R)$ consisting of invertible modules P over R such that $P^{\otimes m} = R$ and $\bigoplus_1^n P$ is free.

For the special linear group the argument is similar. The exact sequence of affine group schemes

$$1 \longrightarrow \mu_d \longrightarrow \mathrm{SL}_n \longrightarrow \mathrm{SL}_n/\mu_d \longrightarrow 1$$

gives the exact sequence of Galois cohomology

$$1 \longrightarrow \mu_d(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n/\mu_d(R) \longrightarrow H^1(R,\mu_d) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{SL}_n) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{SL}_n/\mu_d),$$

where $d = \gcd(n,m)$. The values of all these cohomology sets are also well known, for instance see [40, Chapter III, §2].

The determinant $\det\colon \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_1$ induces a map on rings $(\det)^1_*\colon H^1(R,\mathrm{GL}_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R)$. Suppose $[P] \in H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ is a class represented by a projective module P of rank n. For any automorphism α of P the determinant $\det(\alpha) \in R$ is the induced automorphism of the n-th exterior power $\bigwedge^n P$. Thus $(\det)^1_*([P]) = [\bigwedge^n P]$ and

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(R) \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m(R) \longrightarrow 1.$$

Describe the cohomology set $H^1(R,\mathrm{SL}_n)$. Let P be a projective R-module of rank n such that $\bigwedge^n P \cong R$. And let $\delta_P\colon \bigwedge^n P \longrightarrow R$ be a fixed isomorphism. An isomorphism $\psi\colon P \longrightarrow Q$ is called an isomorhism of pairs $(P,\delta_P) \cong (Q,\delta_Q)$ if $\delta_Q \bigwedge^n \psi = \delta_P$. By $[P,\delta_P]$ denote the class of isomorphisms (P,δ_P). Then for any automorphism ψ of (P,δ_P), we have $\delta_P \bigwedge^n \psi = \delta_P$. This yields that $\det(\psi) = 1$. Therefore the set $H^1(R,\mathrm{SL}_n)$ is determined by the classes $[P,\delta_P]$, i. e., by projective modules P of rank n together with the fixed isomorphism $\bigwedge^n P = R$. And the map $H^1(R,\mathrm{SL}_n) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n)$ corresponds to $[P,\delta_P] \mapsto [P]$.

$H^1(R,\mu_d)$ classifies projective modules P of rank 1 together with the isomorphism $P^{\otimes d} = R$, whereas the map $H^1(R,\mu_d) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{SL}_n)$ sends a projective module P to the direct sum $\bigoplus_1^n P = P \oplus \cdots \oplus P$. Thus its kernel, as well as the quotient group of $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ modulo $\bigwedge^m\big(\mathrm{SL}_n(R)\big)$, contains projective modules P of rank 1 such that $P^{\otimes d} = R$ and $P \oplus \cdots \oplus P = R^n$.

2.3. **Exterior powers as a stabilizer of invariant forms II.** In the previous subsection, we completely analyzed the case of one invariant form. But if $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$, then it turns out that the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ has an ideal of invariant forms. Let us extend the definition of $q(x)$ from §2.2. By default, the form $q(x)$ is considered for the set $[n] = \{1,\dots,n\}$. But in the sequel, we use forms for some subsets of $[n]$. For this purpose define $q_V^m(x)$ for some n_1-subset $V \subseteq [n]$, where $\frac{n_1}{m} \in \mathbb{N}$:

- $q_V^m(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1,\dots,I_{\frac{n_1}{m}})\, x_{I_1} \dots x_{I_{\frac{n_1}{m}}}$ for even m;
- $q_V^m(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1,\dots,I_{\frac{n_1}{m}})\, x_{I_1} \wedge \dots \wedge x_{I_{\frac{n_1}{m}}}$ for odd m,

where the sums in the both cases range over all unordered partitions of the set V into m-element subsets $I_1, \dots, I_{\frac{n_1}{m}}$.

As usual, $f_V^m(x^1, \dots, x^k)$ denotes the [*full*] *polarization* of $q_V^m(x)$, where $k := \frac{n_1}{m}$. Also, we ignore the power m in the notation $f_V^m(x^1, \dots, x^k)$ and $q_V^m(x)$.

Further, divide n by m with the remainder: $n = lm + r$, where $l, r \in \mathbb{N}$. Consider the ideal $Y = Y_{n,m}$ of the ring $\mathbb{Z}[x_I]$ generated by the forms $f_V(x^1, \dots, x^k)$ for all possible $m \cdot l$-element subsets V into $[n]$.

Let Y be an ideal generated by $f_{V_1}, \dots, f_{V_p}$, where $p = \binom{n}{ml}$. Then define the extended Chevalley group $\overline{G}_Y(R)$ as the group of linear transformations preserving the ideal Y:

$$\begin{aligned}\overline{G}_Y(R) := \{g \in GL_N(R) \mid \text{ there exists } \lambda_{V_1}, \dots, \lambda_{V_p} \in R^*, c(V_k, V_l) \in R \text{ such that}\\ f_{V_j}(gx^1, \dots, gx^k) = \lambda_{V_j}(g) f_{V_j}(x^1, \dots, x^k) + \sum_{l \neq j} c(V_j, V_l) \cdot f_{V_l}(x^1, \dots, x^k)\\ \text{for all } 1 \leqslant j \leqslant p \text{ and } x^1, \dots, x^k \in R^N\}.\end{aligned}$$

In other words, $\overline{G}_Y(R) = \mathrm{Fix}_R(Y)$ for any commutative ring R. First we must show that $\overline{G}_Y$ is a group scheme. We use the following standard argument.

Let $f_1, \dots, f_s$ be arbitrary polynomials in t variables with coefficients in a commutative ring R. We are interested in the linear changes of variables $g \in GL_t(R)$ that preserve the condition that all these polynomials simultaneously vanish. In other words, we consider all $g \in GL_t(R)$ preserving the ideal A of the ring $R[x_1, \dots, x_t]$ generated by $f_1, \dots, f_s$. It is well known (see, e. g., [19, Lemma 1] or [99, Proposition 1.4.1]) that the set $G_A(R) = \mathrm{Fix}_R(A) = \mathrm{Fix}_R(f_1, \dots, f_s)$ of all such linear variable changes g forms a group. For any R-algebra S with 1 we can consider $f_1, \dots, f_s$ as polynomials with coefficients in S. Thus the group $G(S)$ is defined for all R-algebras. It is clear that $G(S)$ depends functorially on S. It is easy to provide examples showing that $S \mapsto G(S)$ may fail to be an affine group scheme over R. This is due to the fact that $G_A(R)$ is defined by congruences, rather than equations, in its matrix entries. However in Theorem 1.4.3 of [99] a simple sufficient condition was found, that guarantees that $S \mapsto G(S)$ is an affine group scheme. Denote by $R[x_1, \dots, x_t]_r$ the submodule of polynomials of degree at most r. The following lemma is Corollary 1.4.6 in [99].

Lemma 34. *Let $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_t]$ be polynomials of degree at most r and let A be the ideal they generate. Then for the functor $S \mapsto \mathrm{Fix}_S(f_1, \dots, f_s)$ to be an affine group scheme, it suffices that the rank of the intersection $A \cap R[x_1, \dots, x_t]_r$ does not change under reduction modulo any prime $p \in \mathbb{Z}$.*

We apply this lemma to the case of the ideal $A = Y$ in $\mathbb{Z}[x_I]$.

Lemma 35. *Let $n = ml + r$, where $m, l \in \mathbb{N}$. Then the functor $R \mapsto \overline{G}_Y(R)$ is an affine group scheme over $\mathbb{Z}$.*

Proof. Let us show that for any prime p the polynomials f_{V_j} are independent modulo p. Indeed, specializing x_I appropriately, we can guarantee that one of these polynomials takes value ± 1, while all other vanish. Let $I_1 \sqcup \dots \sqcup I_l = V_j$ be a partition of some ml-element subset $V_j \subset [n]$. Set $x_{I_j} := 1$ for $i = 1, \dots, l$ and $x_I = 0$ for all other variables. The monomial $x_{I_1} \dots x_{I_l}$ only occurs in one form, for which the partition is constructed $V_j = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_l$. Thus the value of the polynomial f_{V_j} is $\operatorname{sgn}(I_1, \dots, I_l) = \pm 1$. $\square$

Our immediate goal is to prove the coincidence of $\overline{G}_Y$ and $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. Lemma 29 is useful for this again. Using the results of the previous two subsections, we only must verify smoothness of $\overline{G}_Y$ and the coincidence of $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ and $\overline{G}_Y^0(K)$ for algebraically closed fields. Note that the proof of the following proposition is completely analogous to the proof of Proposition 30.

Proposition 36. *Suppose* K *is an algebraically closed field. Then*

$$\textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K) = \overline{G}_Y^0(K).$$

Now we verify that the scheme $\overline{G}_Y$ is smooth. It is essentially the same, to evaluate the dimension of the Lie algebra. As above, it is possible to identify the Lie algebra $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ with a homomorphism kernel sending δ to 0 in $K[\delta]$. Thus $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ consists of the matrices $g = e + y\delta$, where $y \in M_N(K)$, satisfying the following conditions $f_{V_j}(gx^1, \dots, gx^k) = \lambda_{V_j}(g) f_{V_j}(x^1, \dots, x^k) + \sum\limits_{l \neq j} c(V_j, V_l) f_{V_l}(x^1, \dots, x^k)$ for all $1 \leqslant j \leqslant p$ and $x^1, \dots, x^k \in K^N$.

Theorem 37. *For any field* K *the dimension of the Lie algebra* $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ *does not exceed* n^2.

Proof. Let g be a matrix satisfying the above conditions for all $1 \leqslant j \leqslant p$ and $x^1, \dots, x^k \in K^N$. Plugging in $g = e + y\delta$ and using that the form f_{V_j} is k-linear, we get

$$\delta\Big(f_{V_j}(yx^1, x^2, \dots, x^k) + \dots + f_{V_j}(x^1, \dots, x^{k-1}, yx^k)\Big)$$
$$= (\lambda_{V_j}(g) - 1) f_{V_j}(x^1, \dots, x^k) + \sum_{l \neq j} c(V_j, V_l) f_{V_l}(x^1, \dots, x^k).$$

for all $1 \leqslant j \leqslant p$.

Now we show that the entries of the matrix y are subject to exactly the same linear dependences, as in Theorem 32. By the very definition $f_{V_j}(e_{I_1}, \dots, e_{I_k}) = 0$ for all indices $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m B_j$, except the cases $\{I_l\}$ is a partition of the set $V_j = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$.

- If $d(I, J) \leqslant m - 2$ ($|I \cup J| \geqslant m + 2$), then $y_{I,J} = 0$. Indeed, then there is a set of pairwise disjoint indices $I_2, \dots, I_k \in \bigwedge^m \big(V_j \setminus I\big)$ such that $d(J, I_2) = d(J, I_3) = 1$ and $d(J, I_4) = \dots = d(J, I_k) = 0$. Set $x^1 := e_J, x^l := e_{I_l}, 2 \leqslant l \leqslant k$. Then $f_{V_j}(x^1, yx^2, \dots, x^k) = \dots = f_{V_j}(x^1, x^2, \dots, yx^k) = 0$. It follows that $f_{V_j}(yx^1, x^2, \dots, x^k) = \pm y_{I,J} = 0$.

- If $d(I,J) = d(M,H) = m-1$, then $y_{I,J} = \pm y_{H,M}$. Here there is a set of pairwise disjoint indices $M, I_3, \ldots, I_k \in \bigwedge^m\big(V_j \setminus I\big)$ such that $d(J,M) = 1$ and $d(J,I_3) = \cdots = d(J,I_k) = 0$. Set $x^1 := e_J, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}, 3 \leqslant l \leqslant k$ and denote by H the index $V_j \setminus (J \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k)$. Then $f_{V_j}(x^1, x^2, yx^3, \ldots, x^k) = \ldots = f_{V_j}(x^1, x^2, \ldots, yx^k) = 0$. It follows that $f_{V_j}(yx^1, x^2, \ldots, x^k) + f_{V_j}(x^1, yx^2, x^3 \ldots, x^k) = 0$. But $f_{V_j}(yx^1, x^2, \ldots, x^k) = \operatorname{sgn}(I, M, I_3, \ldots, I_k) \cdot y_{I,J}$, and $f_{V_j}(x^1, yx^2, x^3, \ldots, x^k) = \operatorname{sgn}(J, H, I_3, \ldots, I_k) \cdot y_{H,M}$.
- Finally, for diagonal entries the following condition holds $y_{I,I} - y_{M,M} = y_{H,H} - y_{J,J}$, where $d(I,J) = d(H,M) = 0$ and $I \cup J = H \cup M$. In this case there is a set of pairwise disjoint indices $I_3, \ldots, I_k \in \bigwedge^m\big(V_j \setminus (I \cup J)\big)$. In other words, $I, J, I_3, \ldots, I_k$ is a partition of the set V_j. Put $x^1 := e_I, x^2 := e_J, x^l := e_{I_l}$ where $3 \leqslant l \leqslant k$. Since $f_{V_l}(x^1, \ldots, x^k) = 0$ for all $l \neq j$, we get
$$(\lambda_{B_j}(g) - 1) = \delta(y_{I,I} + y_{J,J} + y_{I_3,I_3} + \ldots + y_{I_k,I_k}).$$
On the other hand, $H, M, I_3, \ldots, I_k$ is partition of the set V_j too, where $I \cup J = H \cup M$. Substituting $x^1 := e_H, x^2 := e_M, x^l := e_{I_l}$ for all $3 \leqslant l \leqslant k$, we have
$$(\lambda_{B_j}(g) - 1) = \delta(y_{M,M} + y_{H,H} + y_{I_3,I_3} + \ldots + y_{I_k,I_k}).$$

  Combining the obtained qualities, we see that $y_{I,I} + y_{J,J} = y_{M,M} + y_{H,H}$.

Thus, as in the proof of Theorem 32, it turns out that the dimension of the Lie algebra $\operatorname{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ does not exceed n^2: the entries $y_{I,J}$ do not contribute to the dimension when $d(I,J) \leqslant m-2$, they make a contribution $n(n-1)$, when $d(I,J) = m-1$, and, finally, they make a contribution n, for $d(I,J) = m$. $\square$

Consequently we verified all the condition from Lemma 29 and can conclude that $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ equals the stabilizer of Y. The proof is similar to the proof of Theorem 33.

Theorem 38. *If $n = ml + r$, where $m, l \in \mathbb{N}$, then there is an isomorphism $\overline{G}_Y \cong \bigwedge^m \mathrm{GL}_n$ of affine group scheme over $\mathbb{Z}$.*

2.4. **Normalizer Theorem.**

Theorem 39. *Let R be a commutative ring and let $n \geqslant 4$. Then*
$$N\Big(\textstyle\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\Big) = N\Big(\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\Big) = \operatorname{Tran}\Big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\Big) = \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R),$$
where all the normalizers and transporters are taken in $\mathrm{GL}_N(R)$.

Proof. It is clear that $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R) \leqslant N\Big(\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\Big)$. By Theorem 4, we have $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R) \leqslant N\Big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\Big)$. On the other hand, both the normalizers $N\Big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\Big)$ and $N\Big(\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\Big)$ are obviously contained in $\operatorname{Tran}\Big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\Big)$. Thus to finish the proof of the theorem, it suffices to check $\operatorname{Tran}\Big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\Big)$ to be contained in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Let $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ has a unique invariant form, i. e., n is divided by m. Pick any matrix $g \in \mathrm{Tran}\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)\big)$ and pick $h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Then $a := ghg^{-1}$ belongs to $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$, and thus

$$f(ax^1, \dots, ax^k) = f(x^1, \dots, x^k)$$

for all $x^1, \dots, x^k \in R^N$. Substituting $(gx^1, \dots, gx^k)$ for $(x^1, \dots, x^k)$, we get

$$f(ghx^1, \dots, ghx^k) = f(gx^1, \dots, gx^k)$$

for all $x^1, \dots, x^k \in R^N$. Consider the form $D\colon R^N \times \dots \times R^N \longrightarrow R$, defined by the rule

$$D(x^1, \dots, x^k) := f(gx^1, \dots, gx^k).$$

By our assumption, one has

$$D(hx^1, \dots, hx^k) = D(x^1, \dots, x^k)$$

for all $x^1, \dots, x^k \in R^N$ and for all $h \in \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Hence the form D is invariant under the action of $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Thus

$$D(x^1, \dots, x^k) = \lambda \cdot f(x^1, \dots, x^k)$$

for some $\lambda \in R$. Plugging in g^{-1} instead of g, we conclude that λ is invertible. This shows that g belongs to the group $\overline{G}_f(R)$, which by Theorem 33 coincides with $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. $\square$

Corollary 40. *Under the conditions of the theorem, we have*

$$\mathrm{Tran}\Big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)\Big) = \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R).$$

Proof. Let us show that if for some $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ the inclusion $[g, \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] \leqslant \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ holds, then $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Indeed, by Theorem 4 the following inclusion holds.

$$\Big[g, \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\Big] \leqslant \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R).$$

Since $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ is perfect, we get $g \in N(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)) = \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ by the three subgroups lemma. $\square$

3. Decomposition of unipotens

In this section, we construct transvections that will be used to extract a non-trivial root unipotent in the standard description of overgroups and other problems, see [59; 66–68; 71; 75; 82; 90; 94; 95], and also the paper [83], which contains many further references.

3.1. **Stabilization theorems.** For the bivector representation we construct a transvection $T_{*,j}$ in $\bigwedge^2 E_n(R)$, which stabilizes an arbitrary column of a matrix $g \in GL_N(R)$. However in the general case of an arbitrary exterior power, it is not possible to construct a such transvection. This is due to the rapid increase of the residue of transvections when m increases. Recall that the residue $\operatorname{res}\big(\bigwedge^m t_{i,j}(\xi)\big)$ equals the binomial coefficient $\binom{n-2}{m-1}$. Even for the exterior cube there is no transvection, which stabilizes a column of an arbitrary matrix in $GL_N(R)$.

Theorem 41. *Let w be an arbitrary vector in R^N, $n \geqslant 3$. Set*

$$T_{*,j} := \prod_{s\neq j} \textstyle\bigwedge^2 t_{s,j}(\operatorname{sgn}(s,j)w_{sj}), \quad \textit{where } j \in [n].$$

Then $T_{*,j} \cdot w = w$.

Remark 42. Similarly, the element $T_{i,*} := \prod_{s\neq i} \bigwedge^2 t_{i,s}(\operatorname{sgn}(i,s)z_{is})$, $i \in [n]$ stabilizes an arbitrary row $z \in {}^N R$, i. e., $z \cdot T_{i,*} = z$.

Uncover *the idea of the proof* and *forlmulae appearing* in Theorem 41. By formula (1) an exterior transvection $\bigwedge^2 t_{i,j}(\xi)$ can be presented as a product of $(n-2)$ elementary transvections. Thus $T_{*,j}$ is a product of $(n-1)\cdot(n-2)$ elementary transvections in $E_N(R)$. For the case $n = 5$ the transvection $T_{*,5}$ is the following product of root unipotens: $T_{*,5} = x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{15}) \cdot x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{25}) \cdot x_{\alpha_3+\alpha_4}(+w_{35}) \cdot x_{\alpha_4}(+w_{45})$. In terms of elementary transvections $T_{*,5}$ equals

$$\begin{aligned} &t_{12,25}(-w_{15})t_{13,35}(-w_{15})t_{14,45}(-w_{15}) \cdot t_{12,15}(+w_{25})t_{23,35}(-w_{25})t_{24,45}(-w_{25}) \\ &\qquad \cdot t_{13,15}(+w_{35})t_{23,25}(+w_{35})t_{34,45}(-w_{35}) \cdot t_{14,15}(+w_{45})t_{24,25}(+w_{45})t_{34,35}(+w_{45}). \end{aligned}$$

Fig. 4 shows all these transvections. Different types of arrows correspond to different uniponets. Note that the signs in the expression above appear due to the definition of exterior transvections. Namely indices $I = \{i_1, i_2\}$, $J = \{j_1, j_2\}$ are not necessarily in ascending order, so we must calculate $\operatorname{sgn}(i_1 i_2, j_1 j_2) = \operatorname{sgn}(i_1, i_2) \cdot \operatorname{sgn}(j_1, j_2)$. Hence $t_{I,J}(\xi) = t_{\sigma(I),\pi(J)}(\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\pi)\xi)$ where $\sigma(I), \pi(J)$ are in ascending order.

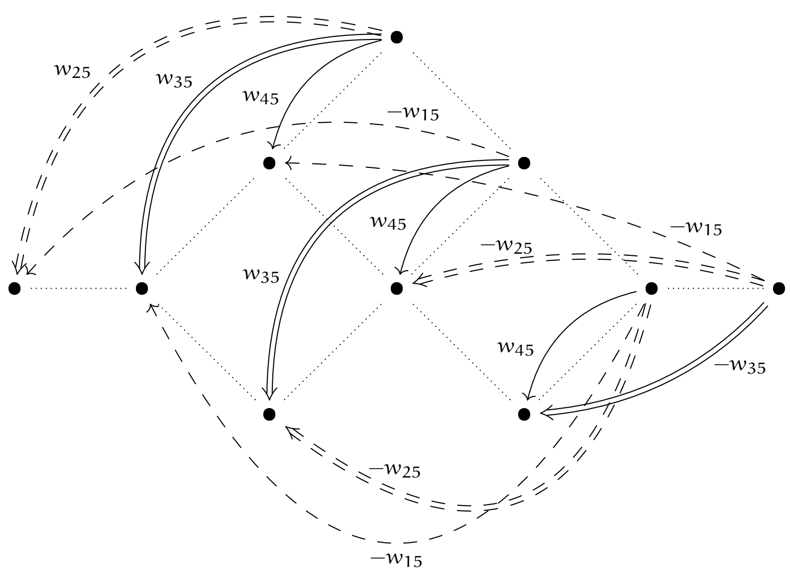

Figure 4: The transvection $T_{*,5}$ on the weight diagram (A_4, ϖ_2).

Proof of Theorem 41. The transvection $T_{*,j}$ acts on the vector w by adding the expression

$$z(p,q,j) := \operatorname{sgn}(pq, jq)\operatorname{sgn}(p,j) w_{pj} w_{jq} + \operatorname{sgn}(qp, jp)\operatorname{sgn}(q,j) w_{qj} w_{jp}$$

to $\binom{n-1}{2}$ entries w_{pq}, $pq \in \bigwedge^2([n]\setminus j)$, i. e., $(T_{*,j}w)_{pq} = w_{pq} + z(p,q,j)$. It is necessary to analyze 6 cases for the numbers $1 \leqslant p, q, j \leqslant n$. Below we give an analysis of these cases. By the above we must only prove that the expressions $z(p,q,j)$ vanish in all cases. They equal:

- $(-1)(+1)w_{pj}w_{jq} + (+1)(+1)w_{qj}w_{jp} = 0$ for $p < q < j$;
- $(+1)(+1)w_{pj}w_{jq} + (+1)(-1)w_{qj}w_{jp} = 0$ for $p < j < q$;
- $(+1)(-1)w_{pj}w_{jq} + (-1)(-1)w_{qj}w_{jp} = 0$ for $j < p < q$;
- $(-1)(-1)w_{pj}w_{jq} + (+1)(-1)w_{qj}w_{jp} = 0$ for $j < q < p$;
- $(+1)(-1)w_{pj}w_{jq} + (+1)(+1)w_{qj}w_{jp} = 0$ for $q < j < p$;
- $(+1)(+1)w_{pj}w_{jq} + (-1)(+1)w_{qj}w_{jp} = 0$ for $q < p < j$.

$\square$

Now let g be a matrix in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, i. e., columns $g_{*,J}$ satisfy the Plücker relations. Construct a transvection in $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ that stabilizes a column with the Plücker relations.

The idea of the construction is the following. Choose one vertex on the weight diagram (i. e., fix one coordinate in arbitrary vector) and choose exterior transvections so that the result of their action on this vertex is a Plücker relation of maximal length $(m+1)$. At the same time the result on other vertices is also Plücker polynomials of different lengths. Since the vector is a column of a matrix in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, we see that all Plücker polynomials equal zero.

Consider the subsystem A_{n-m} in (A_n, ϖ_m) corresponding to the latter $m+1$ weights (A_n, ϖ_m) in the lexicographical order. Denote by γ_i the roots in the subsystem A_{n-m}, starting with the lowest weight (A_n, ϖ_m). For example, for (A_5, ϖ_2), $\gamma_1 = 56, \gamma_2 = 46, \gamma_3 = 45$, see fig. 5.

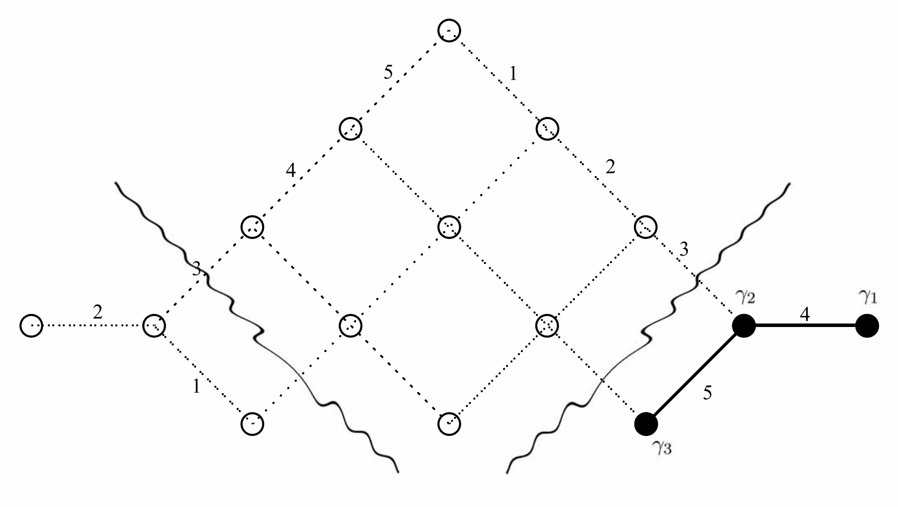

Figure 5: A_3 in (A_5, ϖ_2)

Theorem 43. *Let w be a column of a matrix in the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 2m+1$. Put*

$$T_1 := \textstyle\bigwedge^m t_{m,m+1}(w_{\gamma_1}) \bigwedge^m t_{m,m+2}(-w_{\gamma_2}) \dots \bigwedge^m t_{m,2m+1}((-1)^m w_{\gamma_{m+1}}),$$

then the transvection T_1 stabilizes the column w: $T_1 \cdot w = w$.

Remark 44. For the exterior square, it may seem that this statement is weaker than Theorem 41. But T_1 contains $m+1$ exterior transvections for an arbitrary n. At the same time $T_{*,j}$ contains $(n-1)\cdot(n-2)$ elementary transvections.

Proof. The transvection T_1 is the product of the unipotents

$$x_{\alpha_m}(+w_{\gamma_1}) x_{\alpha_m+\alpha_{m+1}}(-w_{\gamma_2}) \dots x_{\alpha_m+\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_{2m}}((-1)^m w_{\gamma_{m+1}}).$$

It acts on the vector w by adding Plücker polynomials $f_{J,\{m+1,\dots,2m+1\}}$ to $\binom{n-1}{m-1}$ coordinates of the vector w, where $J \in \bigwedge^{m-1}([n] \setminus m)$. Namely,

$$(T_1 w)_{m \cup J} = w_{m \sup J} + f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w).$$

The length of the Plücker polynomial $f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w)$ depends on the cardinality of $J \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m+1\}$. If $|J \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m+1\}| = m-1$, then this is the trivial Plücker polynomial. As the intersection cardinality decreases, the length of the polynomial increases. The maximal length is reached with the empty intersection. Since the coordinates of the vector w satisfy the Plücker relations, then $f_{J,\{m+1,m+2,\dots,2m+1\}}(w) = 0$. $\square$

Example 45. Let $m = 2$ and $n = 5$. Then

$$T_1 = \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(w_{45}) \bigwedge^2 t_{2,4}(-w_{35}) \bigwedge^2 t_{2,5}(w_{34}) = x_{\alpha_2}(+w_{45}) x_{\alpha_2+\alpha_3}(-w_{35}) x_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}(+w_{34}).$$

All the Plücker polynomials $f_{i,345}(w)$, where $i \in [n] \setminus 2$ are short or trivial. If $i \in \{3,4,5\}$, then $f_{i,345}(w)$ is trivial and has the form $w_A w_B - w_B w_A = 0$. Otherwise, $i \in [n] \setminus \{2,3,4,5\}$, $f_{i345}(w) = w_{45}w_{3i} - w_{35}w_{4i} + w_{34}w_{5i}$.

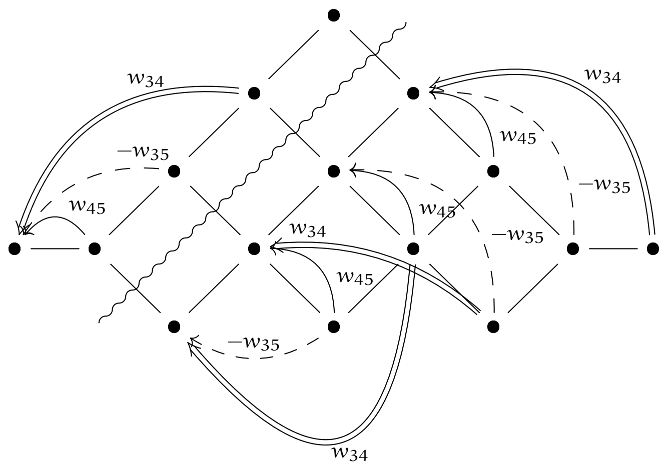

Figure 6: The transvection T_1 on the weight diagram (A_5, ϖ_2)

Example 46. Now let $m = 3$ and $n = 7$. In this case

$$T_1 = \bigwedge^3 t_{3,4}(w_{567}) \bigwedge^3 t_{3,5}(-w_{467}) \bigwedge^3 t_{3,6}(w_{457}) \bigwedge^3 t_{3,7}(-w_{456})$$

changes $\binom{6}{2} = 15$ coordinates of the vector w. In terms of root unipotents this product equals $x_{\alpha_3}(+w_{567})x_{\alpha_3+\alpha_4}(-w_{467})x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}(+w_{457})x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}(-w_{456})$. Then there are three types of the Plücker polynomials $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}}$[3].

6: Let $\{i,j\} \subseteq \{4,5,6,7\}$, then $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}}$ is again trivial. The relation $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}} = 0$ states that Grassmann coordinates commute.

8: Now let either i or j belongs to $\{4,5,6,7\}$. Without loss of generality, we can assume that $i = 4, j \notin \{4,5,6,7\}$. Then $f_{\{4,j\},\{4,5,6,7\}} = -x_{4j5}x_{467} + x_{4j6}x_{457} - x_{4j7}x_{456}$ is a polynomial of length 3.

1: Finally, the maximal length 4 is reached with $i, j \notin \{4,5,6,7\}$. In this case $f_{\{i,j\},\{4,5,6,7\}} = x_{ij4}x_{567} - x_{ij5}x_{467} + x_{ij6}x_{457} - x_{ij7}x_{456}$.

3.2. **Equations for exterior powers.** In this section, we present various series of equations defining the scheme $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$. First we formulate a property of a matrix g in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Exactly in this form we plan to use the equations for the decomposition of unipotents. Extend the definition of matrix entries $g_{I,J}$ for multisets $I = \{i_l\}_{l=1}^m$ and $J = \{j_l\}_{l=1}^m$. Recall that a multiset is a union of not necessarily different elements, i., e., this is a couple (A, m), where A is the base set and $m\colon A \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ is the multiplicity function. In the sequel, we ignore the function m from the notation (A, m), where this is natural. If $(A, m_A), (B, m_B)$ are two multisets, then their

[3]Numbering by the number of changed coordinates in the vector w

arithmetic sum is a multiset $A+B$ consisting of all elements that are present in at least one of the multisets. The multiplicity of each element is equal to the sum of the multiplicities of the corresponding elements: $A+B=\{m_{A+B}(x)x \mid m_{A+B}(x)=m_A(x)+m_B(x)\}$. If in multisets (I,m_I) or (J,m_J) there are elements i_l or j_l such that their multiplicities $m_I(i_l)$ or $m_J(j_l)$ are greater than zero, then we assume that $g_{I,J}=0$, for example $g_{12,11}=g_{22,11}=0$.

Theorem 47. *If a matrix $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ belongs to the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 3$, then for any indices $B, D \in \bigwedge^m[n]$ with $d(B,D) \geqslant m-1$ and any multiset $I+J$ with $I \in \bigwedge^{m-1}[n], J \in \bigwedge^{m+1}[n]$, we have*

$$\sum_{A+C=I+J} \mathrm{sgn}(A,C) g_{A,B} g_{C,D} = 0,$$

where the sum ranges over all partitions of the multiset $I+J$ into m-element indices A and C in $\bigwedge^m[n]$.

Proof. Let $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. Then g preserves the Plücker ideal Plu generated by Plücker polynomials $f_{I,J}$, where $I \in \bigwedge^{m-1}[n], J \in \bigwedge^{m+1}[n]$. Let $x \in R^N$, then

$$f_{I,J}(gx) = \sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h (gx)_{I\cup\{j_h\}} (gx)_{J\setminus\{j_h\}} = \sum_{K,L \in \bigwedge^m[n]} \left(\sum_{h=1}^{m+1} (-1)^h g_{I\cup\{j_h\},K} \cdot g_{J\setminus\{j_h\},L} \right) x_K x_L. \tag{8}$$

Denote by $a_{I+J}^{K,L}$ the coefficient for the monomial $x_K x_L$, which is obviously identical to the coefficient for $x_L x_K$. Then $a_{I+J}^{K,L}$ can be represented as follows

$$a_{I+J}^{K,L} = \sum_{A+C=I+J} \mathrm{sgn}(A,C) g_{A,K} g_{C,L},$$

where the sum ranges over all partitions of the multiset $I+J$ into pairs of m-element subsets A and C. To complete the proof, note that the condition of preserving the ideal Plu guarantees that all coefficients $a_{I+J}^{K,L}$ with $d(K,L) \geqslant m-1$ in formula (8) are equal to zero. $\square$

For the exterior square this proof gives the criterion, not only the property.

Proposition 48. *A matrix $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ belongs to the group $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ iff the following equations hold.*

- *For any $H \in \bigwedge^4[n]$ and for any $B, D \in \bigwedge^2[n]$ with $B \cap D \neq \emptyset$, we have*

$$a_H^{B,D}(g) = \sum_{A\sqcup C=H} \mathrm{sgn}(A,C) g_{A,B} g_{C,D} = 0;$$

- *For any $H \in \bigwedge^4[n]$ and for any $B, D, B', D' \in \bigwedge^2[n]$ with $B \cup D = B' \cup D'$ and $B \cap D = \emptyset$, we have*

$$\mathrm{sgn}(B,D) \cdot a_H^{B,D}(g) = \mathrm{sgn}(B',D') \cdot a_H^{B',D'}(g).$$

Recall that the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ is a stabilizer of an invariant form or an ideal of forms. Using this fact we present another series of equations that determine whether a matrix $g \in \mathrm{GL}_N(R)$

belongs to the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. For short we consider the non-exceptional case of a single form, i. e., $k := \frac{n}{m} \geqslant 3$ is natural and m is even. The proof for odd m is similar. By Theorem 27 the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ has the invariant polynomial form

$$f(x^1, \dots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \dots, I_k)\, x^1_{I_1} \dots x^k_{I_k},$$

where the sum ranges over all ordered partitions of the set $[n]$ into m-element subsets $I_1, \dots, I_k$. Now we introduce the notation of the partial derivative of the invariant form f:

$$f_I(x^2, \dots, x^k) := f(e^I, x^2, \dots, x^k) = \sum \mathrm{sgn}(I, I_2, \dots, I_k) x^2_{I_2} \dots x^k_{I_k},$$

where the sum ranges over all ordered partitions of the set $[n]\backslash I$ into m-element subsets $I_2 \dots, I_k$. In addition, for any set of pairwise disjoint indices $\mathcal{I} := \{I_2, \dots, I_k\}$, where $I_l \in \bigwedge^m[n]$ we denote by $\overline{\mathcal{I}}$ the index $[n] \setminus (I_2 \cup \dots \cup I_k) \in \bigwedge^m[n]$, i. e., it is the complement of the set $\mathcal{I}$ in $[n]$.

Theorem 49. *Let $k = \frac{n}{m} \geqslant 3$ be a natural number. A matrix $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ belongs to the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ iff the following conditions hold.*

- *For any indices $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ such that in the set $\mathcal{I} = \{I_2, \dots, I_k\}$ there are two intersecting indices (i. e., there exist $2 \leqslant l_1 \neq l_2 \leqslant k$: $d(I_{l_1}, I_{l_2}) \geqslant 1$), we have*

$$f_{I_1}(g_{*,I_2}, g_{*,I_3}, \dots, g_{*,I_k}) = 0;$$

- *For any indices $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ such that in the sets $\mathcal{I} = \{I_2, \dots, I_k\}, \mathcal{J} = \{J_2, \dots, J_k\}$ there are no intersecting indices (i. e., for any $2 \leqslant l_1 \neq l_2 \leqslant k$: $d(I_{l_1}, I_{l_2}) = d(J_{l_1}, J_{l_2}) = 0$), we have*

$$\mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{J}}, J_2, \dots, J_k) g'_{\overline{\mathcal{J}},J_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}) = \mathrm{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \dots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{J_1}(g_{*,J_2}, \dots, g_{*,J_k}).$$

Proof. Let $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, then there exists a multiplier $\lambda(g) \in R^*$ such that for all $x^1, \dots, x^k \in R^N$, we have

$$f(gx^1, \dots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \dots, x^k). \tag{9}$$

Note that the latter condition is equivalent to the same condition in which x^l are base vectors e^{I_l} for all $I_l \in \bigwedge^m[n]$.

First let in the set $\mathcal{I} = \{I_2, \dots, I_k\}$ there are two indices with distance greater than zero. For short we assume that these are I_2 and I_3. Then our condition (9) becomes $f(ge^{I_1}, \dots, ge^{I_k}) = 0$ for all $I_l, l \neq 2, 3$ or, what is the same, $f(x^1, ge^{I_2}, \dots, ge^{I_k}) = 0$ for all $x^1 \in R^N$ and $I_l \in \bigwedge^m[n], l \geqslant 4$. This is equivalent to $f(e^{I_1}, ge^{I_2}, \dots, ge^{I_k}) = 0$ for all $I_1, I_4, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$.

Consider the second case. Let there be no intersecting indices in the set $\mathcal{I}$. Then our condition (9) becomes $f(gx^1, ge^{I_2}, \dots, ge^{I_k}) = \lambda(g) f(x^1, e^{I_2}, \dots, e^{I_k})$ for all $x^1 \in R^N$, and this is equivalent to $f(x^1, ge^{I_2}, \dots, ge^{I_k}) = \lambda(g) f(g^{-1}x^1, e^{I_2}, \dots, e^{I_k})$ for all $x^1 \in R^N$. It suffices to impose this equation only for base vector $x^1 = e^{I_1}$; in other words, $f(e^{I_1}, ge^{I_2}, \dots, ge^{I_k}) = \lambda(g)f(g^{-1}e^{I_1}, e^{I_2}, \dots, e^{I_k})$. The left-hand side equals $f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k})$. We transform the right-hand side.

$$\lambda(g)f(g^{-1}e^{I_1}, e^{I_2}, \dots, e^{I_k}) = \lambda(g)f(g'_{*,I_1}, e^{I_2}, \dots, e^{I_k}) = \\ = \lambda(g) \sum_{L\in\bigwedge^m[n]} g'_{L,I_1} f(e^{I_L}, e^{I_2}, \dots, e^{I_k}) = \lambda(g)\operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \dots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1}.$$

To get rid of the factor $\lambda(g)$, we take another set $J_1, \dots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ with disjoint $J_2, \dots, J_k$.

Now let H be an affine group scheme over $\mathbb{Z}$ defined by the equations imposed in the statement of the theorem. It suffices to establish the inclusion $H(R) \subseteq \bigwedge^m GL_n(R)$ for a local ring R. Let M be the maximal ideal in R. Note that the first series of equations implies that $f(ge^{I_1}, \dots, ge^{I_k}) = 0$ for any $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ such that there are intersecting ones in $I_2, \dots, I_k$. It remains to find $\lambda \in R^*$ such that $f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}) = \lambda \operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \dots, I_k) g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1}$ for all indices $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ with the condition that there are no intersecting ones in $I_2, \dots, I_k$.

First we show that there exist $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ with disjoint $I_2, \dots, I_k$ such that $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}) \in R^*$. Assume the converse. Then for all $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ with disjoint $I_2, \dots, I_k$, we have $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}) \in M$. Observe that there are $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ with disjoint $I_2, \dots, I_k$ such that $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} \in R^*$. Indeed, it suffices to fix $I_2, \dots, I_k$ and to vary I_1. Furthermore, there exist $J_1, \dots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ with disjoint $J_2, \dots, J_k$ such that $f_{J_1}(g_{*,J_2}, \dots, g_{*,J_k}) \in R^*$. Otherwise, invoking equations on pairs of adjacent columns, we can conclude that $f_{J_1}(g_{*,J_2}, \dots, g_{*,J_k}) \in M$ for any fixed $J_1, J_2 \in \bigwedge^m[n]$ and any $J_3, \dots, J_k \in \bigwedge^m[n]$. But by linearity it follows that $f_{J_1}(g_{*,J_2}, x^3, \dots, x^k) \in M$ for any $x^3, \dots, x^k \in R^N$. This means that $f_{J_1}(g_{*,J_2}, e^{L_3}, \dots, e^{L_k}) = \pm g_{[n]\setminus(J_1\cup L_3\cup\ldots\cup L_k),J_2} \in M$ for all $J_1, L_3, \dots, L_k \in \bigwedge^m[n]$, and this is clearly impossible. Thus $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}) \in M$ and $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{J_1}(g_{*,J_2}, \dots, g_{*,J_k}) \in R^*$, which contradicts the fact that g belongs to $H(R)$. Therefore there exist indices $I_1, \dots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ with disjoint $I_2, \dots, I_k$ such that $g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}) \in R^*$. We set

$$\lambda := \operatorname{sgn}(\overline{\mathcal{I}}, I_2, \dots, I_k)\left(g'_{\overline{\mathcal{I}},I_1}\right)^{-1} f_{I_1}(g_{*,I_2}, \dots, g_{*,I_k}).$$

□

The obtained two series of equations are called equations on a *set of adjacent columns* and on *two sets of nonadjacent columns*. It is precisely in this form that we intend to use these equations for the initial problem of description of overgroups. However it is often convenient to use equations with only two columns. Now we introduce another notation of the partial derivative of the invariant form f:

$$f_{I_3,\dots,I_k}(x, y) := f(x, y, e^{I_3}, \dots, e^{I_k}) = \sum \operatorname{sgn}\left(J_1, J_2, I_3, \dots, I_k\right) x_{J_1} y_{J_2},$$

where the sum ranges over all ordered partitions of the set $[n] \setminus (I_3 \cup \ldots \cup I_k)$ into pairs of m-element subsets J_1, J_2. As in Theorem 49, we get equations on a *pair of adjacent columns* and on *two pairs of nonadjacent columns.*

Theorem 50. *Let $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. A matrix $g \in \mathrm{GL}_N(R)$ belongs to the group $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ iff its entries satisfy the following equations.*

- *For any indices $I_1, \ldots, I_k \in \bigwedge^m[n]$ with $d(I_1, I_2) \geqslant 1$, we have*

$$f_{I_3,\ldots,I_k}(g_{*,I_1}, g_{*,I_2}) = 0;$$

- *For any two sets of indices $I_1, \ldots, I_k, J_1, \ldots, J_k \in \bigwedge^m[n]$ with $d(I_1, I_2) = d(J_1, J_2) = 0$, we have*

$$\sum_{L_j \in \bigwedge^m [n]} \mathrm{sgn}(J_1, J_2, L_3, \ldots, L_k) g'_{L_3,J_3} \ldots g'_{L_k,J_k} \cdot f_{I_3,\ldots,I_k}(g_{*,I_1}, g_{*,I_2}) =$$

$$= \sum_{L_j \in \bigwedge^m [n]} \mathrm{sgn}(I_1, I_2, L_3, \ldots, L_k) g'_{L_3,I_3} \ldots g'_{L_k,I_k} \cdot f_{J_3,\ldots,J_k}(g_{*,J_1}, g_{*,J_2}).$$

3.3. **Reverse decomposition of unipotens.** We formulate a variation of the decomposition of unipotents for exterior powers — "reverse decomposition of unipotents". Let us clarify the concepts related to congruence subgroups modulo an ideal, introduced in §1.5. We use the identical notation ρ_A for the following reduction homomorphism:

$$\begin{array}{rcl} \rho_A \colon \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R) & \longrightarrow & \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A) \\ a & \mapsto & \overline{a} = (\overline{a}_{I,J}) \end{array}$$

The kernel of the homomorphism ρ_A is denoted by $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ and is called the *principal (relative) congruence subgroup of level A*. Denote the full preimage of the center of $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)$ under ρ_A by $\mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$. Such a group is called *full (relative) congruence subgroup of level A*. Note that these groups $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A) \leqslant \mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$, $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ and $\mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$ are normal in $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Proposition 51. *Let R be a commutative ring, $n \geqslant 3$. Then for any ideal $A \trianglelefteq R$ the equality*

$$[\mathrm{C} \textstyle\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A), \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)] = \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)$$

holds.

This result is called the *standard commutator formula.* It has a lot of proofs in various contexts, see, for instance, the paper [33].

The *upper level* of a matrix $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ is the smallest ideal $I = \mathrm{lev}(g) \trianglelefteq R$ such that $g \in \mathrm{C} \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, I)$. As in the case of the general linear group, the upper level is generated by the off-diagonal entries $g_{I,J}$, $I \neq J$ and by the pair-wise differences of its diagonal entries $g_{I,I} - g_{J,J}$, $I \neq J$. Note that it suffices to consider only the fundamental differences $g_{I,I} - g_{\bar{I},\bar{I}}$, where $\bar{I}$ is the next index after $I \in \bigwedge^m[n]$ in ascending order. Thus the upper level $\operatorname{lev}(g)$ is generated by $\binom{n}{m}^2 - 1$ elements.

Lemma 52. *Let* $P_{ij} := \bigwedge^m t_{i,j}(1) \bigwedge^m t_{j,i}(-1) \bigwedge^m t_{i,j}(1) \in \bigwedge^m E(n, R)$, *where* $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. *Then for any index* $k \neq i, j$ *and any* $\xi \in R$, *we have*

- ${}^{P_{ki}} \bigwedge^2 t_{i,j}(\xi) = \bigwedge^2 t_{k,j}(\xi)$;
- ${}^{P_{kj}} \bigwedge^2 t_{i,j}(\xi) = \bigwedge^2 t_{i,k}(\xi)$.

The proof is straightforward.

To formulate the following result we introduce a notation. A matrix of the form $g^{\pm h}$ is called an *elementary (exterior) g-conjugate*, where $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ and $h \in \bigwedge^m E_n(R)$.

Theorem 53 (Reverse decomposition of unipotents)**.** *Let* R *be a commutative ring and let* $g \in \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 2m+1$. *Then for any* $\xi \in \operatorname{lev}(g)$ *the transvection* $\bigwedge^m t_{k,l}(\xi)$ *is a product of* $\leqslant 8\left(\binom{n}{m}^2 - 1\right)$ *elementary conjugates of* g *and* g^{-1}. *Namely for any* $1 \leqslant k \neq l \leqslant n$ *and* $I, J \in \bigwedge^m[n]$, $d(I, J) = p$, *we have*

(1) $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,J})$ *is a product of* $\leqslant 8(m-p)$ *elementary exterior* g*-conjugates;*
(2) $\bigwedge^m t_{k,l}(g_{I,I} - g_{J,J})$ *is a product of* $\leqslant 24(m-p)$ *elementary exterior* g*-conjugates.*

We prove this result for the exterior square of the elementary group using stabilization Theorem 41. Thus for $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ the restriction on n can be weakened: $n \geqslant 4$. But before let us formulate a consequence. The reverse decomposition of unipotents can be regarded as a stronger version of the standard description of $\bigwedge^m E_n(R)$-normalized subgroups. Hence we have one more very short proof of the Sandwich Classification Theorem for the exterior square of the elementary groups.

Theorem 54. *Let* H *be a subgroup of* $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. *Then* H *is normalized by* $\bigwedge^m E_n(R)$ *if and only if*

$$\bigwedge^m E_n(R, A) \leqslant H \leqslant C \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R, A)$$

for some ideal A *of* R.

Proof for the exterior square. Let H is normalized by $\bigwedge^2 E_n(R)$. Set $A := \{\xi \in R \mid \bigwedge^2 t_{1,2}(\xi) \in H\}$. It is obvious that $\bigwedge^2 E_n(R, A) \leqslant H$. It remains to check that if $g \in H$, then $g_{I,J}$, $g_{I,I} - g_{\bar{I},\bar{I}} \in A$. But Theorem 53 states exactly this claim. Hence $H \leqslant C \bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R, A)$. The converse follows from Proposition 51. $\square$

Now we prove Theorem 53. A proof of statement (1) with $p = 1$ is a key step in our verification. All other cases follow from the fist one.

Proof. Let $T := T_{*,1} = \prod_{s\neq 1} \bigwedge^2 t_{s,1}(g_{1s,12})$. By Theorem 41 the first column of Tg equals the first column of the matrix g. Hence the first column of the matrix $h := g^{-1}Tg$ is standard, i. e., h lies in the parabolic subgroup P_{12}.

Lemma 55. *Let R be a commutative ring and let $g \in \bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 3$. Suppose that one column of g with index $I = \{i_1 i_2\}$ is trivial; then for any indices $K \in \bigwedge^2([n] \setminus \{i_1, i_2\})$ and $J \in \bigwedge^2[n]$ such that $d(I, J) = |I \cap J| = 1$, we have $g_{K,J} = 0$.*

Proof. Suppose that g belongs to $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$. Then by Theorem 47 for any indices $A, C \in \bigwedge^2[n]$, $d(A, C) = 1$ and for any $H \in \bigwedge^4[n]$, we have

$$\sum_{B\sqcup D=H} \operatorname{sgn}(B, D) g_{B,A} g_{D,C} = 0.$$

Let g has the trivial column A. It follows that the above sum equals $g_{H\setminus A,C}$. $\square$

By this lemma h also lies in the submaximal parabolic subgroup ${}_K P_{12}$, where K corresponds the latter $\binom{n-2}{2}$ rows.

Next note that for any $j \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$ the exterior transvections $\bigwedge^2 t_{1,j}(\xi)$ and $\bigwedge^2 t_{2,j}(\xi)$ sit in the unipotent radical U of the parabolic subgroup ${}_K P_{12}$. Using obvious formula $[xy, z]^x = [y, z] \cdot [z, x^{-1}]$, we get

$$z := [T^{-1}h, \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(1)]^{T^{-1}} = [h, \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(1)] \cdot [\textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(1), T].$$

Now the matrix z is a product of four elementary exterior conjugates of g and g^{-1}. The first commutator $[h, \bigwedge^2 t_{2,3}(1)]$ belongs to the unipotent radical U, whereas the second one equals $\bigwedge^2 t_{2,1}(g_{13,12})$. Since the transvection $\bigwedge^2 t_{1,3}(1)$ also sits in U and the unipotent radical is abelian, we obtain

$$[\textstyle\bigwedge^2 t_{1,3}(-1), z] = [\textstyle\bigwedge^2 t_{1,3}(-1), u \cdot \textstyle\bigwedge^2 t_{2,1}(g_{13,12})] = \textstyle\bigwedge^2 t_{2,3}(g_{13,12}).$$

Consequently the transvection $\bigwedge^2 t_{2,3}(g_{13,12})$ is a product of eight elementary exterior conjugates of g and g^{-1}. By Lemma 52 it follows that $\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{13,12})$ is a product of eight elementary exterior g-conjugates. It remains to note that we can bring $g_{I,J}$ to position $(13, 12)$ conjugating by monomial matrices from $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$.

Since $n \geqslant 4$ there are two distinct indices $h_1, h_2 \in [n] \setminus \{i, j\}$. Let us remark that the entry of $g^{\bigwedge^2 t_{i,j}(-1)}$ in the position (ih_1, ih_2) equals $g_{jh_1,ih_2} + g_{ih_1,ih_2}$. Applying (1) with $p = 1$ to $g^{\bigwedge^2 t_{i,j}(-1)}$, we get that $\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh_1,ih_2} + g_{ih_1,ih_2})$ is a product of eight elementary exterior g-conjugates. Therefore,

$$\textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh_1,ih_2}) = \textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh_1,ih_2} + g_{ih_1,ih_2}) \textstyle\bigwedge^2 t_{k,l}(-g_{ih_1,ih_2})$$

is a product of sixteen elementary exterior g-conjugates.

Assertion (2) with $p = 1$ follows from the above. Obviously, the entry of $g^{\bigwedge^2 t_{i,j}(1)}$ in the position (ih, jh) equals $g_{ih,ih} - g_{jh,jh} + g_{ih,jh} - g_{jh,ih}$ for any index $h \neq i, j$. Applying (1) with $p = 1$, we obtain that $\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{ih,ih} - g_{jh,jh} + g_{ih,jh} - g_{jh,ih}) \in \bigwedge^2 E_n(R)$ is a product of eight elementary exterior g-conjugates. Finally,

$$\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{ih,ih} - g_{jh,jh}) = \bigwedge^2 t_{k,l}(g_{ih,ih} - g_{jh,jh} + g_{ih,jh} - g_{jh,ih}) \bigwedge^2 t_{k,l}(g_{jh,ih} - g_{ih,jh})$$

is a product of 24 elementary exterior g-conjugates.

To finish the proof of the theorem it only remains to check the last assertion. There is an index $K \in \bigwedge^2[n]$ such that $d(I, K) = d(J, K) = 1$. Therefore,

$$\bigwedge^2 t_{k,l}(g_{I,I} - g_{J,J}) = \bigwedge^2 t_{k,l}(g_{I,I} - g_{K,K}) \bigwedge^2 t_{k,l}(g_{K,K} - g_{J,J})$$

is a product of 48 elementary exterior g-conjugates. $\square$

4. Subgroup lattice is standard

The extraction of a unipotent (an elementary transvection) from an intermediate subgroup H is the key point for the standard description of overgroups. In the previous papers on this problem, e. g., joint works of Nikolai Vavilov and Victor Petrov on overgroups of classical groups, the authors extract a non-trivial unipotent from an arbitrary element $a \in G(\Phi, R) \setminus N\big(E(\Phi, R)\big)$. In fact, for this purpose they extract a number of unipotents and prove that all these unipotents do not vanish under the canonical homomorphism $g \mapsto a$, where g is the generic element of $G(\Phi, R)$.

For the exterior powers the methods of Vavilov and Petrov are unavailable. However we construct a new extraction technique based on the notion of a generic element. Using this method we describe all overgroups of the exterior square of the elementary group. Observe that this new method is useful not only for the polyvector representations of $E_n(R)$ but for the tensor powers of the elementary group or other cases like "Subsystem subgroups", "Subring subgroups", and others.

4.1. **Preliminaries.** In this section, we use the following additional notation.

All rings and algebras are assumed to be commutative and to contain a unit. All homomorphisms preserve the unit elements. For an ideal $\mathfrak{a}$ of a ring R denote by $\rho_{\mathfrak{a}}$ the canonical homomorphism $R \to R/\mathfrak{a}$. This homomorphism is called the reduction homomorphism modulo $\mathfrak{a}$. If s is an element of the ring R, then $R_s = \langle s\rangle^{-1}R$ denotes the principal localization, i. e., the localization of R in the multiplicative subset generated by s. The localization homomorphism $R \to R_s$ is denoted by λ_s.

In the Section, the expression "group scheme" means "flat affine group scheme of finite type". Let G be an affine group scheme over K. Denote by $A = K[G]$ the affine algebra of G. By definition of an affine scheme, an element $h \in G(R)$ can be identified with the ring homomorphism $h\colon A \to R$. We always do this identification. Denote by $g \in G(A)$ the generic element of G, i. e., the identity map $\mathrm{id}_A\colon A \to A$. An element $h \in G(R)$ induces a group homomorphism $G(h)\colon G(A) \to G(R)$ by the rule $G(h)(a) = h \circ a$. Thus the image of g under $G(h)$ equals h. For a ring homomorphism $\varphi\colon R \to R'$ we denote by the same symbol φ the induced homomorphism $G(\varphi)\colon G(R) \to G(R')$. This cannot lead to a confusion as we always can distinguish between two different meanings of φ by the type of its argument. With this convention we have $h(g) = h \circ \mathrm{id}_A = h$.

Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of a ring R. As usual, $G(R, \mathfrak{a})$ denotes the principal congruence subgroup of $G(R)$ of level $\mathfrak{a}$, i. e., the kernel of the reduction homomorphism $\rho_{\mathfrak{a}}\colon G(R) \to G(R/\mathfrak{a})$.

We always assume that G is a Chevalley–Demazure group scheme over a ring K with a reduced irreducible root system $\Phi \neq A_1$, and that either $\Phi \neq C_2$ or K has no epimorphisms onto the field of 2 elements. Denote by $E(\mathfrak{a})$ a subgroup of $G(R)$ generated by elementary root unipotents $x_\alpha(r)$, $\alpha \in \Phi$, $r \in \mathfrak{a}$. Then $E(R)$ is the [absolute] elementary subgroup of $G(R)$ and $E(R, \mathfrak{a}) = E(\mathfrak{a})^{E(R)}$ denotes the relative elementary subgroup.

4.2. **Main theorem.** Let $G = G(\Phi, \_)$ denotes a Chevalley–Demazure group scheme with a reduced irreducible root system $\Phi \neq A_1$ and let $E = E(\Phi, \_)$ be its elementary subgroup functor. All algebraic groups are considered as affine group schemes over a ring K, which in applications can be equal to $\mathbb{Z}$ or its localization. We always assume that $E(R)$ is perfect for all K-algebras R, which amounts to say that $\Phi \neq A_1$ and either $\Phi \neq C_2$ or K has no epimorphism onto the field of 2 elements. Let $D\colon \mathfrak{Rings} \to \mathfrak{Groups}$ be a subfunctor (not necessarily a subscheme) of G. For an arbitrary K-algebra R with a unit let $\mathcal{L} = L\big(D(R), G(R)\big)$ be the lattice of subgroups of $G(R)$ containing $D(R)$. We study the lattice $\mathcal{L}$ under certain conditions on D and G.

For an ideal $\mathfrak{a}$ of a ring R denote by $N(R, \mathfrak{a})$ the normalizer of $D(R)E(R, \mathfrak{a})$ in $G(R)$. Put $N(R) = N(R, 0)$. For an affine scheme X over a ring K the affine algebra of X is denoted by $K[X]$.

The lattice $\mathcal{L} = L\big(D(R), G(R)\big)$ is called *standard* if for any subgroup $\Gamma \in \mathcal{L}$ there exists a unique ideal $\mathfrak{a}$ of R such that

$$D(R)E(R, \mathfrak{a}) \leqslant \Gamma \leqslant N(R, \mathfrak{a}).$$

This result is the main theorem of the present section. Following Anthony Bak the sublattices $L\big(D(R)E(R, \mathfrak{a}), N(R, \mathfrak{a})\big)$ are called *sandwiches*. With this terminology the lattice $\mathcal{L}$ is standard whenever it splits into a disjoint union of sandwiches.

List of conditions. Let R be a ring.

(1) The functor D preserves surjective maps.

(2) For a K-algebra R and an ideal $\mathfrak{a}$ of R, we have

$$[D(R), D(R)E(R, \mathfrak{a})] = D(R)E(R, \mathfrak{a}) \quad \text{and} \quad D(R) \leqslant E(R).$$

(3) For any $r \in R$ and $\alpha \in \Phi$ such that $x_\alpha(r) \notin D(R)$, we have

$$\langle D(R), x_\alpha(r) \rangle = D(R)E(R, rR).$$

(4) The map $R \mapsto N(R)$ defines a closed subscheme in G.

(5) If $D(R)^h \leqslant N(R)$, then $h \in N(R)$.

(6) For any field F the subgroup $D(F)$ is an "almost maximal" subgroup in $G(F)$, i.e., if a subgroup contains $D(F)$, then it either is contained in $N(F)$ or contains $E(F)$.

(7) The subgroup $\langle D(A), g \rangle \leqslant G(A)$ contains an elementary root unipotent $x_\alpha(\xi) \notin N(A)$. Moreover, for any field F there exists an element $y \in E(F)$ such that $x_\alpha\big(y(\xi)\big) \notin N(F)$.

(8) If $h \in G(R, \operatorname{Rad} R) \setminus N(R)$, then $\langle D(R), h \rangle$ contains a non-trivial root unipotent.

The following statement computes the normalizer $N(R, \mathfrak{a})$ in terms of $N(R/\mathfrak{a})$. It will be used in the proof of the main theorem. The idea of the proof is borrowed from the proof of Theorem 3 of [55]. In the sequel, we use the following commutator formulas. A direct computation shows that $[x, yz] = [x, y] \cdot [x, z]^{y^{-1}}$ for all elements x, y, z of an abstract group. Therefore for subgroups X, Y, Z such that YZ is a subgroup, we have

$$[X, YZ] \leqslant [X, Y] \cdot [X, Z]^{Y}. \tag{10}$$

The second formula is the standard commutator formula obtained by Giovanni Taddei [77] and Leonid Vaserstein [79]. For an ideal $\mathfrak{a}$ of a ring R, we have

$$[E(R), G(R, \mathfrak{a})] = [E(R, \mathfrak{a}), G(R)] = E(R, \mathfrak{a}). \tag{11}$$

Lemma 56. *Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of a ring R. Under conditions 1 and 2, $N(R, \mathfrak{a})$ is the full preimage of $N(R/\mathfrak{a})$ under the reduction homomorphism $\rho_{\mathfrak{a}}$.*

Proof. Since the natural map $D(R) \to D(R/\mathfrak{a})$ is surjective, the group $\rho_{\mathfrak{a}}\big(N(R, \mathfrak{a})\big)$ normalizes $D(R/\mathfrak{a})$.

Conversely, let h lies in $G(R)$ such that $\bar{h} = \rho_{\mathfrak{a}}(h) \in N(R/\mathfrak{a})$. Then

$$\rho_{\mathfrak{a}}\Big(D(R)^{h}\Big) \leqslant D(R/\mathfrak{a})^{\bar{h}} \leqslant D(R/\mathfrak{a}).$$

Using the surjectivity of the map $D(R) \to D(R/\mathfrak{a})$, we obtain

$$D(R)^{h} \leqslant D(R)G(R, \mathfrak{a}). \tag{12}$$

By formulas (10) and (11),

$$\begin{aligned}[D(R), D(R)^{h}] \leqslant [D(R), D(R)G(R, \mathfrak{a})] \leqslant D(R)[D(R), G(R, \mathfrak{a})]^{D(R)} \\ = D(R)[D(R), G(R, \mathfrak{a})] \leqslant D(R)E(R, \mathfrak{a}).\end{aligned}$$

Take the mutual commutator subgroups of the both sides of inclusion (12) with $D(R)^{h}$. By Condition 2, we get

$$\begin{aligned}D(R)^{h} = [D(R)^{h}, D(R)^{h}] \leqslant [D(R)^{h}, D(R)G(R, \mathfrak{a})] \leqslant \\ [D(R)^{h}, D(R)] \cdot [D(R)^{h}, G(R, \mathfrak{a})]^{D(R)^{h}} \leqslant \\ D(R)E(R, \mathfrak{a})[E(R), G(R, \mathfrak{a})] = D(R)E(R, \mathfrak{a})\end{aligned}$$

(we used also the standard commutator formula and normality of $E(R)$ in $G(R)$). Since $E(R, \mathfrak{a})$ is normal in $G(R)$, this inclusion implies that h normalizes the group $D(R)E(R, \mathfrak{a})$. $\square$

The following lemma shows that the conditions above imply that the set $N(R, \mathfrak{a}) \setminus D(R)E(R, \mathfrak{a})$ contains no elementary root unipotents and establish the uniqueness property.

Lemma 57. *Let $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ be ideals of a* K*-algebra* R*. Conditions 2 and 3 imply that the set* $N(R,\mathfrak{a}) \setminus D(R)E(R,\mathfrak{a})$ *contains no elementary root unipotents and that the sandwiches* $L\big(D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})\big)$ *and* $L\big(D(R)E(R,\mathfrak{b}), N(R,\mathfrak{b})\big)$ *have empty intersection.*

Proof. Let $\Gamma \in L\big(D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})\big)$. By Condition 2,

$$[D(R),\Gamma] \geq [D(R), D(R)E(R,\mathfrak{a})] = D(R)E(R,\mathfrak{a}).$$

On the other hand,

$$[D(R),\Gamma] \leqslant [D(R)E(R,\mathfrak{a}), N(R,\mathfrak{a})] \leqslant D(R)E(R,\mathfrak{a}).$$

Thus the ideal $\mathfrak{a}$ is defined uniquely by the subgroup Γ from the sandwich.

If $x_\alpha(r) \in N(R,\mathfrak{a}) \setminus D(R)E(R,\mathfrak{a})$, then by Condition 3, $E(R, rR) \leqslant N(R,\mathfrak{a})$. It follows that $D(R)E(R,\mathfrak{a}) \leqslant D(R)E(R,\mathfrak{a}+rR) \leqslant N(R,\mathfrak{a})$, which contradicts the first paragraph of the proof. $\square$

Theorem 58. *Suppose that conditions 1–8 hold; then for any* K*-algebra* R *the lattice* $\mathcal{L} = L\big(D(R), G(R)\big)$ *is standard.*

Proof. Let Γ be a subgroup of $G(R)$ containing $D(R)$. Put

$$\mathfrak{a} := \{s \in R \mid \text{ there exists } \alpha \in \Phi : \ x_\alpha(s) \in \Gamma \setminus D(R)\}.$$

Using condition 3, we have $D(R)E(R,\mathfrak{a}) \leqslant \Gamma$. Let $\overline{R} = R/\mathfrak{a}$ and $\overline{\Gamma} = \rho_\mathfrak{a}(\Gamma)$. Suppose $x_\alpha(\bar{r}) \in \overline{\Gamma} \setminus D(\overline{R})$ for some $\alpha \in \Phi$ and $\bar{r} \in \overline{R}$. Using condition 1, we get $D(\overline{R}) \leqslant \overline{\Gamma}$ and by condition 3, $D(\overline{R})E(\overline{R}, \bar{r}\overline{R}) \leqslant \overline{\Gamma}$. Let $r \in R$ be the preimage of the element $\bar{r}$ under $\rho_\mathfrak{a}$. Then

$$D(R)E(R, rR) \leqslant \Gamma G(R,\mathfrak{a}).$$

Taking the commutator subgroup of $D(R)$ with the both sides of the latter inclusion, we obtain

$$[D(R), D(R)E(R, rR)] \leqslant [D(R), \Gamma G(R,\mathfrak{a})]. \tag{13}$$

By Condition 2, the left-hand side equals $D(R)E(R, rR)$. On the other hand, by formula (10) the right-hand side of inclusion (13) is contained in $[D(R),\Gamma] \cdot [D(R), G(R,\mathfrak{a})]^\Gamma$. Since $D(R) \leqslant E(R)$, by the standard commutator formula this group is contained in $\Gamma \cdot E(R,\mathfrak{a})^\Gamma = \Gamma$. Note that $x_\alpha(\bar{r}) \notin D(\overline{R})$ implies $x_\alpha(r) \notin D(R)$. By definition of the ideal $\mathfrak{a}$, it follows that $r \in \mathfrak{a}$. Thus $\bar{r} = 0$ and the set $\overline{\Gamma} \setminus D(\overline{R})$ does not contain non-trivial root unipotents.

Now let $\xi \in A$ be an element from Condition 7. Put $x = x_\alpha(\xi) \in G(A)$. For a K-algebra B let

$$S(B) = \{b \in G(B) \mid b(x) \in N(B)\}.$$

By Condition 4, N is a closed subscheme of G defined by some ideal $\mathfrak{q}$ of A. As usual, we denote $N = V(\mathfrak{q})$. Then it is easy to see that $S = V\big(x(\mathfrak{q})A\big)$ is a closed subscheme of G. For an element

$h \in \overline{\Gamma}$ the root unipotent element $x_\alpha\big(h(\xi)\big) = h\big(x\big)$ belongs to the subgroup generated by h and $D(\overline{R})$. By the previous paragraph of the proof it must lie in $N(\overline{R})$, hence $h \in S(\overline{R})$. Since h is an arbitrary element of $\overline{\Gamma}$, we conclude that $\overline{\Gamma} \in S(\overline{R})$.

Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of the ring $\overline{R}$. Denote by F the residue field $\overline{R}/\mathfrak{m}$. The subgroup $\tilde{\Gamma} = \rho_\mathfrak{m}(\overline{\Gamma})$ is contained in $S(F)$, hence by condition 7, $\tilde{\Gamma}$ does not contain $E(F)$. On the other hand, $\tilde{\Gamma} \geq D(F)$. Consequently using condition 6, we get $\tilde{\Gamma} \leqslant N(F)$.

Let $h \in \overline{\Gamma}$ and let $\tilde{h} = \rho_\mathfrak{m}(h) = \rho_\mathfrak{m} \circ h$. Since $\tilde{h} \in N(F)$, we see that $\tilde{h}(\mathfrak{q}) = 0$. Hence $h(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{m}$. Since $\mathfrak{m}$ is an arbitrary maximal ideal, we obtain $h(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Rad} \overline{R}$. Consequently $\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}} \circ h(\mathfrak{q}) = 0$ and $\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}(h) \in N(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R})$.

Since h is an arbitrary element of $\overline{\Gamma}$, we get $\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}(\overline{\Gamma}) \in N(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R})$. This implies that

$$\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}\Big(D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}}\Big) \leqslant D(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R})^{\rho_{\operatorname{Rad} \overline{R}}(\overline{\Gamma})} \leqslant D(\overline{R}/\operatorname{Rad} \overline{R}),$$

Therefore $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \leqslant D(\overline{R})G(\overline{R}, \operatorname{Rad} \overline{R})$.

If there exists an element $ab \in D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \smallsetminus N(R)$, where $a \in D(\overline{R})$ and $b \in G(\overline{R}, \operatorname{Rad} \overline{R})$, then $b \in D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \smallsetminus N(R)$. Since $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}}$ contains the subgroup generated by $D(\overline{R})$ and b, Condition 8 implies that $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}}$ contains a non-trivial root unipotent. But we have already proved that $\overline{\Gamma}$ does not contain such elements. The contradiction shows $D(\overline{R})^{\overline{\Gamma}} \leqslant N(R)$. Now Condition 5 implies that $\overline{\Gamma} \leqslant N(R)$ and by Lemma 56, $\Gamma \leqslant N(R, \mathfrak{a})$. □

4.3. **Transporters.** We start with studying properties of transporters. In this section, G denotes an algebraic group over a ring K and X, Y are subfunctors of G. Unfortunately the function $R \mapsto \operatorname{Tran}_{G(R)}\big(X(R), Y(R)\big)$ in general is not a subfunctor of G. Therefore we define a scheme-theoretic transporter $\operatorname{Tran}_G(X, Y)$ as a subfunctor of G given by the formula

$$\operatorname{Tran}_G(X, Y)(R) = \{a \in G(R) \mid z^a \in Y(\tilde{R}) \text{ for all } z \in X(\tilde{R}) \text{ and all } R\text{-algebras } \tilde{R}\}.$$

(we always identify elements of $G(R)$ with their canonical images in $G(\tilde{R})$).

More generally, let w be a group word in 2 letters, i. e., an element of the 2-generated free group. For elements z, a of an abstract group Γ we write $w(z, a)$ to denote the image of w in Γ under the group homomorphism, sending the first generator of the free group to z and the second one to a. For subsets Δ, Ω of Γ define

$$\operatorname{Tran}^w_\Gamma(\Delta, \Omega) = \{a \in \Gamma \mid w(z, a) \in \Omega \text{ for all } z \in \Delta\}.$$

Similarly, define the scheme-theoretic w-transporter $\operatorname{Tran}^w_G(X, Y)$ as a subfunctor of G given by the formula

$$\operatorname{Tran}^w_G(X, Y)(R) = \{a \in G(R) \mid w(z, a) \in Y(\tilde{R}) \text{ for all } z \in X(\tilde{R}) \text{ and all } R\text{-algebras } \tilde{R}\}.$$

Now we give sufficient conditions for the scheme-theoretic w-transporter to be closed and discuss the equation $\mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R) = \mathrm{Tran}^w_{G(R)}\big(X(R),Y(R)\big)$. For usual transporters (i. e., for $w = x_2^{-1}x_1x_2$) the results can be found in [54, Theorem 6.1] or [17, I, § 2, 7.7 and II, § 2, 3.6]). Recall that a K-scheme X is called locally free if there exists an open affine covering X_i, where i ranges over an index set such that the affine algebra of X_i is a free K-module for each i. In our case X is affine, therefore refining the open covering we may assume that each X_i is a principal affine open subscheme of X, i. e., $K[X_i]$ is a principal localization of $K[X]$. In this section, $B = K[X]$ and $x \in X(B \otimes R)$ denotes the image of the generic element of X under the natural homomorphisms $X(B) \to G(B) \to G(B \otimes R)$.

Lemma 59. *Let* X *be a representable subfunctor of* G *and* R *a* K*-algebra. Then*

$$\mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R) = \{a \in G(R) \mid w(x,a) \in Y(B \otimes R)\}.$$

Proof. Let $\tilde{R}$ be an R-algebra, $z \in X(\tilde{R})$, and a belongs to the right-hand side of the above formula. Applying $z \otimes \mathrm{id}_R$ to the inclusion $w(x,a) \in Y(B \otimes R)$, we get $w(z,a) \in Y(\tilde{R} \otimes R)$. Sending this element to $Y(\tilde{R})$ by the multiplication homomorphism $\tilde{R} \otimes R \to \tilde{R}$, we see that $a \in \mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R)$. Thus we proved that the right-hand side is contained in the transporter. The inverse implication is trivial. □

Theorem 60. *Suppose that* X *is a locally free* K*-scheme and* Y *is a closed subscheme of* G*. Then* $\mathrm{Tran}^w_G(X,Y)$ *is a closed subscheme.*

Proof. Identify the generic element g of the scheme G with its canonical image in $G(B \otimes A)$. Take an open covering $\operatorname{Spec} B_{s_i}$ of X such that each B_{s_i} is a free K-module and denote by h_i the canonical image of $w(g,x)$ in $G(B_{s_i} \otimes A)$. Thus $h_i \colon A \to B_{s_i} \otimes A$ as a map. In other words, h_i is the composition of the map $w(g,x) \colon A \to B \otimes A$ with the localization homomorphism λ_{s_i}. The basis of the K-module B_{s_i} defines an isomorphism $B_{s_i} \otimes A \cong \prod_{j \in J_i} A$ of A-modules. Denote by $h_{ij} \colon A \to A$ the composition of h_i with the projection to the j-th component of the direct product above. As usual, $I(Y)$ denotes the ideal of A that defines the subscheme Y. Let q be the ideal generated by all images of $I(Y)$ under the maps h_{ij}.

Let $a \in G(R)$. By Lemma 59, $a \in \mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R)$ whenever $w(x,a) \in Y(B \otimes R)$. Since $\operatorname{Spec} B_{s_i}$ is an open covering of X, this inclusion is equivalent to the inclusions $v_i \in Y(B_{s_i} \otimes R)$, where v_i is the canonical image of $w(x,a)$ in $G(B_{s_i} \otimes R)$. Note that as a map v_i is the composition

$$(\lambda_{s_i} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes a) \circ w(x,g) = (\mathrm{id} \otimes a) \circ (\lambda_{s_i} \otimes \mathrm{id}) \circ w(x,g) = (\mathrm{id} \otimes a) \circ h_i.$$

The inclusion $v_i \in Y(B_{s_i} \otimes R)$ is equivalent to

$$v_i\Big(I(Y)\Big) = 0 \iff \Big(\mathrm{id} \otimes a\Big)\Big(h_i\Big(I(Y)\Big)\Big) = 0 \iff a\Big(h_{ij}\Big(I(Y)\Big)\Big) = 0$$

for all $j \in J_i$. Thus $a \in \mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R)$ whenever $a(\mathfrak{q}) = 0$, which means that $\mathrm{Tran}^w_G(X,Y)$ is a closed subscheme of G defined by the ideal $\mathfrak{q}$. $\square$

Next we prove that under some natural conditions group-theoretic and scheme-theoretic normalizers coincide. Let Z be a function from the class of rings to the class of sets such that $Z(R)$ is a subset of $G(R)$. Since an intersection of closed subschemes of G is a closed subscheme, there exists the smallest subscheme $\overline{Z}$ of G containing Z (i. e., $\overline{Z}(R) \supseteq Z(R)$ for all rings R). This subscheme is called the closure of Z in G. In other words, $\overline{Z}$ is a closed subscheme defined by the intersection of the kernels of z over all $z \in Z(R)$ and all K-algebras R. A function Z is called dense in G if $\overline{Z} = G$. If X is a subfunctor of G and R is a K-algebra, then by the closure of $X(R)$ in G we mean the closure of the function that equals $X(R)$ at R and the empty set elsewhere.

Proposition 61. *Let* X *be a representable subfunctor of* G *and let* Y *be a closed subscheme of* G*. If* $X(R) = X_R(R)$ *is dense in* X_R*, then*

$$\mathrm{Tran}^w_{G(R)}\big(X(R), Y(R)\big) = \mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R).$$

Proof. Let $h \in G(R)$. By Lemma 59, $h \in \mathrm{Tran}^w_G(X,Y)(R)$ whenever $w(x,h) \in Y(B \otimes R)$. Put $u = w(x,h)\colon A \to B \otimes R$. If $\mathfrak{q} = I(Y)$, then the inclusion $u \in Y(B \otimes R)$ is equivalent to $u(\mathfrak{q}) = 0$. On the other hand,

$$\begin{aligned} h \in \mathrm{Tran}^w_{G(R)}\big(X(R), Y(R)\big) &\iff w(a,h) \in Y(R) \ \text{ for all } a \in X(R) \iff \\ & w(a,h)(\mathfrak{q}) = 0 \ \text{ for all } a \in X(R) \iff (a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}) \circ u(\mathfrak{q}) = 0 \ \text{ for all } a \in X(R), \end{aligned}$$

where $a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}$ is the composition $B \otimes R \xrightarrow{a \otimes \mathrm{id}} R \otimes R \xrightarrow{\mathrm{mult}} R$. The closure of $X_R(R)$ in X_R is equal to $V(\mathfrak{a})$, where $\mathfrak{a}$ is the intersection of the kernels of the R-algebra homomorphisms $\hat{a}\colon B \otimes R \to R$ over all $\hat{a} \in X_R(R)$. The R-algebra homomorphisms $\hat{a}\colon B \otimes R \to R$ are in one-to-one correspondence with the K-algebra homomorphisms $a\colon B \to R$, namely $\hat{a} = a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}$. Thus $X_R(R)$ is dense in X_R if and only if the intersection of the kernels of the homomorphisms $a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}$ over all $a \in X(R)$ is trivial. It follows that $u(\mathfrak{q}) = 0$ if and only if $(a \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{id}) \circ u(\mathfrak{q}) = 0$ for all $a \in X(R)$, which completes the proof. $\square$

4.4. **Computation of the normalizer.** Let H be a closed K-subgroup of G. Suppose that H itself is a Chevalley–Demazure group scheme with a reduced irreducible root system Ψ and denote by D its elementary subgroup functor. Suppose also that $D(R)$ is perfect for all K-algebras R, which amounts to say that $\Psi \neq A_1$ and either $\Psi \neq C_2$ or K has no epimorphisms onto the field of 2 elements. Let R be a K-algebra. For a functor X on the category of K-algebras denote by X_R its restriction to the category of R-algebras (of course, H_R and G_R are affine group schemes over R).

Let $N(R)$ be the normalizer of $D(R)$ in $G(R)$ and let $\tilde{N}(R)$ be the normalizer of $H(R)$ in $G(R)$. Put $\mathrm{Tran}(R) = \mathrm{Tran}_{G(R)}(D(R), H(R))$. Clearly, both the normalizers $N(R)$ and $\tilde{N}(R)$ are contained in $\mathrm{Tran}(R)$.

Lemma 62. $N(R) = \mathrm{Tran}(R) \geq \tilde{N}(R)$.

Proof. Let $h \in \mathrm{Tran}(R)$ and let R' be a finitely generated $\mathbb{Z}$-subalgebra of R. Then $D(R')^h \leqslant H(R'')$ for some finitely generated $\mathbb{Z}$-subalgebra $R'' \supseteq R'$ of R. By the main theorem of [32] $H(R'')/D(R'')$ is solvable, hence $D(R'')$ is the largest perfect subgroup of $H(R'')$. Since $D(R')^h \leqslant H(R'')$ and $D(R')^h$ is perfect, it is contained in $D(R'') \leqslant D(R)$. Any ring R is a direct limit of finitely generated $\mathbb{Z}$-subalgebras, hence $D(R)^h \leqslant D(R)$, i. e., $h \in N(R)$. □

In the next corollary we consider the scheme-theoretic normalizers. For a subfunctor X of G put $N_G(X) = \mathrm{Tran}_G(X, X)$.

Corollary 63. $N_G(D)$ *and* $N_G(H)$ *are closed in* G.

Proof. Let X_α, $\alpha \in \Psi$ be root subgroups of H corresponding to a chosen split maximal torus. Note that by Lemma 62, $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H)$. Then $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H) = \bigcap_{\alpha\in\Psi} \mathrm{Tran}_G(X_\alpha, H)$. Since H is a closed subscheme and $K[X_\alpha] = K[t]$ is a free K-module, the assertion about $N_G(D)$ follows from Theorem 60.

The Gauss decomposition in a split reductive group states that there exists an open covering of H such that each piece is isomorphic (as a scheme) to $U \times U \times T$, where U is the unipotent radical of the Borel subgroup and T is the split torus. Therefore H is locally free and the result again follows from Theorem 60. □

Lemma 64. $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H) = N_G(H)$.

Proof. The inclusions $N_G(D) = \mathrm{Tran}_G(D, H) \geq N_G(H)$ follows immediately from Lemma 62 and the definition of scheme-theoretic transporters. Conversely, let R be a K-algebra and $h \in N_G(D)(R) = \mathrm{Tran}_G(D, H)(R)$. Consider the functor D_R^h on the category of R-algebras given by $D_R^h(R') = D(R')^h$ with the obvious action on morphisms (we still identify h with its image in $G(R')$ under the structure homomorphism $R \to R'$).

Clearly, $D_R^h \leqslant H_R$, hence the closure $\overline{D_R^h}$ of D_R^h in G_R is contained in H_R. The conjugation by h is a scheme automorphism of G_R, therefore $\overline{D_R^h} = (\overline{D_R})^h$. Since the closure of the elementary subgroup is the whole Chevalley group, $\overline{D_R} = H_R$, it follows that $(H_R)^h \leqslant H_R$, which means that $h \in N_G(H)(R)$. □

In the following statement we verify the density condition of Proposition 61 and establish the equality of group-theoretic and ring-theoretic normalizers.

Lemma 65. *Suppose that* R *is an algebra over an infinite field* K. *Then* $\mathbb{G}_a(R)$ *is dence in* $\mathbb{G}_{a,R}$.

Proof. An R-algebra homomorphism $R[\mathbb{G}_a] = R[t] \to R$ is the evaluation homomorphism. A polynomial $p \in R[t]$ lies in the intersection of the kernels of all such homomorphisms whenever $p(r) = 0$ for all $r \in R$. In particular, $p(r_i) = 0$, $i = 0, \dots, \deg p$, for $\deg P + 1$ distinct elements of K. Since the Vandermonde determinant is nonzero, all coefficients p must be zero. Thus the intersection of the kernels of all R-algebra homomorphisms $R[\mathbb{G}_a] \to R$ is trivial, which means that the closure of $G_a(R)$ is $G_{a,R}$. $\square$

Proposition 66. *If* K *is an infinite field, then*

$$N_G(D)(R) = \mathrm{Tran}_G(D,H)(R) = N_G(H)(R) = N(R) = \tilde{N}(R) = \mathrm{Tran}(R).$$

Proof. The group $D(R)$ is generated by the root subgroups $X_\alpha(R)$, $\alpha \in \Psi$, therefore,

$$\mathrm{Tran}(R) = \bigcap_{\alpha\in\Psi} \mathrm{Tran}_{G(R)}\Big(X_\alpha(R), H(R)\Big) \text{ and } \mathrm{Tran}_G(D,H)(R) = \bigcap_{\alpha\in\Psi} \mathrm{Tran}_G\Big(X_\alpha, H\Big)(R).$$

Since $X_\alpha \cong \mathbb{G}_a$, by Proposition 61 and Lemma 65 we have

$$\mathrm{Tran}_{G(R)}\Big(X_\alpha(R), H(R)\Big) = \mathrm{Tran}_G\Big(X_\alpha, H\Big)(R), \text{ hence } \mathrm{Tran}(R) = \mathrm{Tran}_G(D,H)(R).$$

Then we obtain the following chain of inclusions.

$$\tilde{N}(R) \leqslant \mathrm{Tran}(R) = \mathrm{Tran}_G(D,H)(R) = \mathrm{Tran}_G(H,H)(R) \leqslant \mathrm{Tran}_{G(R)}\Big(H(R), H(R)\Big) = \tilde{N}(R).$$

Thus $\tilde{N}(R) = \mathrm{Tran}(R)$ and all other equalities were already proved in Lemmas 62 and 64. $\square$

4.5. **Equality of the transporters and the normalizers.** This section is devoted to the proof of Condition 5 in the settings of Sections §§4.3–4.4.

Theorem 67. *Let* K *is an infinite field of characteristic not 2 if* $\Psi = A_2, B_l, C_l, F_4, G_2$ *and not 3 if* $\Phi = G_2$. *Suppose further that there exists an absolutely irreducible representation of* H *in* G, *i. e., a linear representation of* G *such that the* K*-submodules* $KD(K)$ *and* $KG(K)$ *of the matrix ring* $M_n(K)$ *are equal. Then* $\mathrm{Tran}(D,N) = N$.

Proof. The condition on existence of a representation ensures that the centralizer of D in G is equal to the center of G and to the center of D. For a K-algebra R denote by $D_{\mathrm{ad}}(R)$ the quotient group of $D(R)$ modulo its center. It is known that the center of $D(R)$ coincides with the [scheme-theoretic] center of H, therefore $D_{\mathrm{ad}}(R)$ is the elementary subgroup of the adjoint Chevalley group of type Ψ.

Let $a \in \mathrm{Tran}(D,N)(R)$. Put $C = R[H]$ and let $h \in H(C) \subseteq G(C)$ be the generic element of H_R. By Lemma 59, $h^a \in N(C)$ (as usual, we identify a with its canonical image in $G(C)$).

Consider the map $\theta\colon N(C) \to \mathrm{Aut}(D(C))$, where $N(C)$ acts on $D(C)$ by conjugation. Since $\theta(b)$ acts identically on the center of $D(C)$, we may consider θ as an automorphism of $D_{\mathrm{ad}}(C)$.

By the classification of automorphisms of an adjoint elementary Chevalley group [12, Theorem 1], $\theta(h^a) = \theta(b) \cdot \gamma \cdot \varphi$, where $b \in H_{\mathrm{ad}}(C)$, γ is a graph automorphism, and φ is induced by a ring automorphism. Then $\varphi = \gamma^{-1}\theta(b^{-1}h^a)$ is an automorphism of the group scheme H_C. Being induced by a ring automorphism $\psi\colon C \to C$, φ acts on a root subgroup X_α sending $x_\alpha(r)$ to $x_\alpha(\psi(r))$. Since φ is a scheme automorphism, ψ induces an automorphism of the scheme $\mathbb{G}_{a,C}$. But a scheme automorphism of $\mathbb{G}_{a,C}$ preserving the element 1 is identity. Therefore ψ and φ are also identical.

Thus $\theta(b^{-1}h^a) = \gamma$. The counit map $\varepsilon\colon C \to R$ takes h to the identity element of $H(R)$ (this is equivalent to the definition of the counit). Both sides of equation $\theta(b^{-1}h^a) = \gamma$ are natural transformations $D_{\mathrm{ad}} \to D_{\mathrm{ad}}$, therefore the diagram

$$\begin{tikzcd}
D_{\mathrm{ad}}(C) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\gamma=\theta(b^{-1}h^a)"'] & D_{\mathrm{ad}}(R) \arrow[d, "\gamma=\theta_R(\varepsilon(b)^{-1})"] \\
D_{\mathrm{ad}}(C) \arrow[r, "\varepsilon"] & D_{\mathrm{ad}}(R)
\end{tikzcd}$$

commutes, where $\theta_R\colon N(R) \to \mathrm{Aut}\big(D_{\mathrm{ad}}(R)\big)$ denotes the conjugation by the argument of θ_R. We see that $\theta(\varepsilon(b))\gamma$ acts trivially on $D_{\mathrm{ad}}(R)$. This means that γ is induced by an inner automorphism of the root system Ψ and can be substituted by conjugation by an appropriate element from the Weyl group. Multiplying b by this element we may assume that γ is identity.

Now $\theta(h^a) = \theta(b)$, which means that $b^{-1}h^a$ acts trivially on $D_{\mathrm{ad}}(C)$, hence also on $D(C)$. It follows that $h^a = bc$ for some element c from the center of $G(C)$. Let R' be an R-algebra. Sending h to each element from $D(R')$, we see that $D(R')^a \leqslant D(R') \cdot \mathrm{Cent}(G(R'))$. Finally,

$$D(R')^a = [D(R')^a, D(R')^a] \leqslant [D(R') \cdot \mathrm{Cent}(G(R')),\, D(R') \cdot \mathrm{Cent}(G(R'))] \leqslant D(R'),$$

which means that $a \in N(R)$. $\square$

4.6. **Overgroups of the exterior square of elementary groups.** In the rest of the work, we describe overgroups of the exterior square of the elementary group. Recall that for $\bigwedge^2 E_n(R)$ the net $\mathbb{A}$ consists of two ideals A_0 and A_1. At the same time they are equal in the case $n \geqslant 6$ or $n \geqslant 4$ and the additional condition $3 \in R^*$. We follow these restrictions. To describe the overgroups, we use the developed theory for the exterior square. In its notation $G(\Phi, R) = \mathrm{GL}_N(R), D(R) = \bigwedge^2 E_n(R)$. We study the subgroup lattice $\mathcal{L} = L\big(\bigwedge^2 E_n(R), \mathrm{GL}_N(R)\big)$.

Observe that for the exterior square almost all conditions of Theorem 58 are obvious or well known. Now we must only verify the following conditions.

- The normilizer $N(\_)$ is a closed subscheme in $\mathrm{GL}_N(\_)$; and over a field F this normalizer $N(F) = N\big(\bigwedge^2 E_n(F)\big)$ is “closed to be maximal” in $\mathrm{GL}_N(F)$;

- The transporter from $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$ to $\mathrm{N}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)\big)$ equals $\mathrm{N}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)\big)$ for any K-algebra R;
- Extract a non-trivial elementary root unipotent in a subgroup that contains the generic element of GL_N and $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n$.

However in §4.4 we proved that if R is an algebra over an infinite field, then $\mathrm{N}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)\big) = \mathrm{Tran}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(R)\big)$. By Corollary 40, $\mathrm{Tran}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R), \mathrm{N}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)\big)\big) = \mathrm{N}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)\big)$. Moreover, in §2.4 we proved that these normalizers and transporters are equal to $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ for an arbitrary commutative ring and even n. Thus the second item holds.

In §4.3 we shown that the transporter $\mathrm{Tran}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R), \bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(R)\big)$ is closed because $\bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(\_)$ is a closed subscheme. Indeed, $\bigwedge^2 \mathrm{SL}_n(R) = \bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R) \cap \mathrm{SL}_N(R)$ for any commutative ring R, and $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R)$ is set by equations via invariant forms or via the Plücker ideal. Thus $\mathrm{N}(\_)$ is closed.

In the paper [16] Bruce Cooperstein proved maximality of the normalizer $\mathrm{N}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(F)\big)$ for finite fields; and for algebraically closed fields, the assertion follows from Chow's Theorem [15]. For infinite fields, the maximality can be obtained from the works of Franz Timmesfeld, devoted to the classification of subgroups generated by quadratic unipotent groups [78].

Therefore we must only extract a non-trivial transvection from an intermediate subgroup generated by the generic element g of the group $\mathrm{GL}_N(R)$ and by the group $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(K[\mathrm{GL}_N])$. Further, if the notation of indices $I, J \in \bigwedge^2[n]$ in an elementary transvection $t_{I,J}(\xi)$ is ambiguous, then we use the refined notation $t_{i_1,i_2;j_1,j_2}(\xi)$. Let

$$g := t_{23;12}(\xi_1) t_{34;12}(\xi_2) \dots t_{n-2,n-1;12}(\xi_{n-3}) t_{n-1,n;12}(\xi_{n-2}),$$

i.e., g is a matrix that differs from the identity matrix only in $(n-2)$ positions in the first column.

The extraction follows in the standard way. For the exterior square in §3.1 we constructed the transvection $T_{*,j}(w) = \prod_{s\neq j} \bigwedge^2 t_{s,j}(\mathrm{sgn}(s,j) w_{sj})$, which stabilizes an arbitrary column of a matrix from $\mathrm{GL}_N(R)$. Now, using appropriate non-trivial $T_{*,j}$, we stabilize the first $n-2$ columns of the matrix g. Thus the obtained matrix belongs to the parabolic subgroup P_{1k}, where $k = n-1$. Further, we consider the commutator of the obtained matrix with an exterior transvection from the uniponent radical U_{1k} of the parabolic subgroup P_{1k}. Then this commutator belongs to U_{1k}. If the commutator is not an elementary transvection, it is necessary to consider several other commutators with appropriate exterior transvections from U_{1k}.

Lemma 68. *Put* $h := t_{23;1l}(\xi_1) \dots t_{n-1,n;1l}(\xi_{n-2}) \in \bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$, *where* $2 \leqslant l \leqslant n-1$. *Then*

$$[h, T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] = t_{23;1,l+1}(-\xi_1 \xi_{l-1}) \dots t_{n-1,n;1,l+1}(-\xi_{n-2}\xi_{l-1}).$$

Proof. We prove the statement by induction on the group dimension n. If $n=4$, then

$$[h, T_{*,3}(h'_{*,12})] = [h, t_{12,13}(-\xi_1)t_{24,34}(-\xi_1)t_{24,23}(\xi_2)] = t_{23;13}(-\xi_1^2)t_{34;13}(-\xi_2\xi_1) \text{ for } l=2;$$
$$[h, T_{*,4}(h'_{*,13})] = [h, t_{13,14}(-\xi_2)] = t_{23;14}(-\xi_1\xi_2)t_{34;14}(-\xi_2^2) \text{ for } l=3.$$

Now let $h = t_{23;1l}(\xi_1)\dots t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}) \in \bigwedge^2 E_{n+1}(R)$. Then

$$[h, T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] =: [z \cdot t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), T_{*,l+1}(h'_{*,1l})],$$

where $z = t_{23;1l}(\xi_1)\dots t_{n-1,n;1l}(\xi_{n-2})$. Using the formula $[ab,c] = {}^a[b,c]\cdot[a,c]$, we get

$${}^z[t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] \cdot [z, T_{*,l+1}(h'_{*,1l})].$$

By the inductive assumption the second factor equals $t_{23;1,l+1}(-\xi_1\xi_{l-1})\dots t_{n-1,n;1,l+1}(-\xi_{n-2}\xi_{l-1})$.

Further, note that $T_{*,l+1}(h'_{*,1l}) = \bigwedge^2 t_{l,l+1}(h'_{l,l+1;1l})\bigwedge^2 t_{l+2,l+1}(-h'_{l+1,l+2;1l})$ for $2 \leqslant l \leqslant n-1$ and $T_{*,n+1}(h'_{*,1n}) = \bigwedge^2 t_{n,n+1}(h'_{n,n+1;1n})$ for $l=n$. But $\bigwedge^2 t_{l+2,l+1}(-h'_{l+1,l+2;1l})$ commutes with $t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1})$. Thus

$$[t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), T_{*,l+1}(h'_{*,1l})] = [t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), \textstyle\bigwedge^2 t_{l,l+1}(h'_{l,l+1;1l})]$$

for any $2 \leqslant l \leqslant n$. Therefore,

$$[t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), \textstyle\bigwedge^2 t_{l,l+1}(h'_{l,l+1;1l})] = [t_{n,n+1;1l}(\xi_{n-1}), t_{1l;1,l+1}(-\xi_{l-1})] = t_{n,n+1;1,l+1}(-\xi_{n-1}\xi_{l-1}).$$

To conclude the proof, it remains to observe that the matrix z commutes with the obtained transvection. □

Proposition 69. *In the subgroup* H *generated by* g *and* $\bigwedge^2 E_n(K[GL_N])$, *there exists a non-trivial matrix from* P_{1k}.

Proof. Let $g = t_{23;12}(\xi_1)\dots t_{n-1,n;12}(\xi_{n-2}) \in H \leqslant GL_N(R)$. Then, using Lemma 68, we get

$$[g, T_{*,3}(g'_{*,12}), T_{*,4}(g'_{*,13}), \dots, T_{*,n}(g'_{*,1k})] = t_{23;1n}(p_1)\dots t_{n-1,n;1n}(p_{n-2}) \in H,$$

where $p_1, \dots, p_{n-2} \in \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_{n-2}]$ are monomials with coefficients ± 1. Thus we obtain a non-trivial matrix from P_{1k}. □

Proposition 70. *If in the subgroup* H *there exists a non-trivial matrix from* P_{1k}, *then there exists a non-trivial elementary transvection.*

Proof. Let $h := t_{23;1n}(p_1)\dots t_{n-1,n;1n}(p_{n-2}) \in P_{1k}$ be the matrix from the previous proposition. Consider the commutator h with the exterior transvection $\bigwedge^2 t_{1,n}(\zeta) \in U_{1k}$. Then

$$[h, \textstyle\bigwedge^2 t_{1,n}(\zeta)] = [t_{n-1,n;1n}(p_{n-2}), t_{1,n-1;n-1,n}(-\zeta)] = t_{1,n-1;1n}(-\zeta p_{n-2}) \in U_{1k},$$

where $-\zeta p_{n-2}$ is a monomial of the form $\pm\zeta\xi_1^{r_1}\ldots\xi_{n-2}^{r_{n-2}}$. $\square$

Therefore the third item also holds, we can apply the Theorem 58. to conclude that the subgroup lattice $\mathcal{L} = L\Big(\bigwedge^2 E_n(R), GL_N(R)\Big)$ is standard.

By summarizing the above, we get the standard description of overgroups for the exterior square of the elementary group.

Theorem 71. *Let* R *be a commutative ring with* 1 *and invertible* 2*. Let also either* $n \geqslant 6$*, or* $n \geqslant 4$ *and* $3 \in R^*$*. Then for any overgroup* H *of the exterior square of the elementary group* $\bigwedge^2 E_n(R)$ *there exists a unique maximal ideal* A *of the ring* R *such that*

$$\bigwedge^2 E_n(R) \cdot E_N(R, A) \leqslant H \leqslant N_{GL_N(R)}\Big(\bigwedge^2 E_n(R) \cdot E_N(R, A)\Big).$$

Besides, Theorem 16 gives an alternative description of the normalizer, namely it equals the corresponding congruence subgroup of level A:

$$N_{GL_N(R)}\Big(\bigwedge^2 E_n(R) \cdot E_N(R, A)\Big) = \rho_A^{-1}\left(\bigwedge^2 GL_n(R/A)\right).$$

Conclusion

Let us list the main results of the thesis that are presented to defense.

(1) **Theorems 27 and 38** describes the exterior power of the general linear group over arbitrary rings as the stabilizer group of a single or several invariant forms. Thus the scheme $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ can be viewed from several perspectives. Namely to use the stabilizer of the Plücker ideal (previously known method) or to use invariant forms or equations based on these forms.

(2) **Theorem 43** proves the standard decomposition of uniponetns for the exterior powers of the general linear group, whereas for the exterior squares **Theorem 53** also proves one of variations of this method — "reverse decomposition of unipotents".

(3) **Theorem 58** shows that under some conditions on a Chevalley group G and its subgroup D, the subgroup lattice $\mathrm{L}\big(\mathrm{D}(\mathrm{R}), \mathrm{G}(\mathrm{R})\big)$ is standard for arbitrary commutative rings R.

(4) **Theorem 71** asserts that the standard description of overgroups for the exterior square of the elementary group holds under some conditions on the dimension of the group.

The author sees further possible directions of research as follows. To apply the technique developed in the thesis to other irreducible representations of the elementary group, for instance, for the symmetric power. Also, to use the new method of description of overgroups for tensor powers and tensor products of elementary groups.

Bibliography

1. *Ananievsky A. S.*, *Vavilov N. A.*, *Sinchuk S. S.* Overgroups of $E(m, R) \otimes E(n, R)$ // J. Math. Sci. 2009. Vol. 161, no. 4. P. 461–473.

2. *Ananievsky A. S.*, *Vavilov N. A.*, *Sinchuk S. S.* Overgroups of $E(m, R) \otimes E(n, R)$ I. Levels and normalizers // St. Petersbg. Math. J. 2012. Vol. 23, no. 5. P. 819–849.

3. *Aschbacher M.* On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.

4. *Aschbacher M.* Finite simple groups and their subgroups // Tuan HF. Gr. Theory, Beijing 1984. Leture Notes Math., Springer, Berlin, 1986. P. 1–57.

5. *Bak A.*, *Hazrat R.*, *Vavilov N.* Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent by abelian // J. Pure Appl. Algebr. 2009. Vol. 213, no. 6. P. 1075–1085.

6. *Bak A.* Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability // K-Theory. 1991. Vol. 4, no. 4. P. 363–397.

7. *Bermudez H.* Linear Preserver Problems and Cohomological Invariants: PhD thesis / Bermudez Hernando. 2014. P. 107.

8. *Borel A.* Properties and linear representations of Chevalley groups // Lect. Notes Math. Vol. 131. 1970. P. 1–55.

9. *Borevich Z. I.*, *Vavilov N. A.* Definition of a net subgroup // J. Sov. Math. 1985. Vol. 30, no. 1. P. 1810–1816.

10. *Borevich Z. I.*, *Vavilov N. A.* The distribution of subgroups contaning a group of block diagonal matrices in the general linear group over a ring // Russ. Math. 1982. Vol. 26, no. 11. P. 13–18.

11. *Borevich Z. I.*, *Vavilov N. A.* The distribution of subgroups in the general linear group over a commutative ring // Proc. Steklov Inst. Math. 1985. Vol. 165. P. 27–46.

12. *Bunina E.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebr. 2012. Vol. 355, no. 1. P. 154–170.

13. *Burness T. C.*, *Testerman D. M.* Irreducible Subgroups of Simple Algebraic Groups – A Survey // Groups St Andrews 2017 Birmingham. Cambridge University Press, 2019. P. 230–260.

14. *Chevalley C.* Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques, I, II. Ecole Norm. Sup., Paris, 1958.

15. *Chow W.-L.* On the Geometry of Algebraic Homogeneous Spaces // Ann. Math. 1949. Vol. 50, no. 1. P. 32–67.

16. *Cooperstein B. N.* Nearly maximal representations for the special linear group. // Michigan Math. J. 1980. Vol. 27, no. 1. P. 3–19.

17. *Demazure M.*, *Gabriel P.* Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups. Vol. 39. Amsterdam: Elsevier, 1980. P. 356. (North-Holland Mathematics Studies).

18. *Dieudonné J. A.*, *Carrell J. B.* Invariant theory, old and new // Adv. Math. (N. Y). 1970. Vol. 4, no. 1. P. 1–80.

19. *Dixon J. D.* Rigid Embedding of Simple Groups in the General Linear Group // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 384–391.

20. *Đoković D. Ž.*, *Platonov V. P.* Algebraic groups and linear preserver problems // C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A. 1993. Vol. 317, no. 10. P. 925–930.

21. *Đoković D. Ž.*, *Li C.-K.* Overgroups of some classical linear groups with applications to linear preserver problems // Linear Algebra Appl. 1994. Vol. 197/198. P. 31–61.

22. *Dye R. H.* Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic two // J. Algebr. 1979. Vol. 59, no. 1. P. 202–221.

23. *Dye R. H.* Maximal subgroups of $GL_{2n}(K)$, $SL_{2n}(K)$, $PGL_{2n}(K)$ and $PSL_{2n}(K)$ associated with symplectic polarities // J. Algebr. 1980. Vol. 66, no. 1. P. 1–11.

24. *Dye R. H.* On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two // Math. Zeitschrift. 1980. Vol. 172, no. 3. P. 203–212.

25. *Garibaldi S.*, *Guralnick R. M.* Simple groups stabilizing polynomials // Forum Math. Pi. 2015. Vol. 3, e3. P. 1–41.

26. *Guralnick R. M.* Invertible preservers and algebraic groups // Linear Algebra Appl. 1994. Vol. 212/213. P. 249–257.

27. *Guralnick R. M.* Invertible Preservers and Algebraic Groups II: Preservers of Similarity Invariants and Overgroups of $PSL_n(F)$ // Linear Multilinear Algebr. 1997. Vol. 43, no. 1–3. P. 221–255.

28. *Guralnick R. M.* Monodromy Groups of Coverings of Curves // Galois Groups Fundam. Groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2003. Vol. 41. P. 1–46.

29. *Guralnick R. M.*, *Li C.-K.* Invertible preservers and algebraic groups III: preservers of unitary similarity (congruence) invariants and overgroups of some unitary subgroups // Linear Multilinear Algebr. 1997. Vol. 43, no. 1–3. P. 257–282.

30. *Guralnick R. M.*, *Tiep P. H.* Low-Dimensional Representations of Special Linear Groups in Cross Characteristics // Proc. London Math. Soc. 1999. Vol. 78, no. 1. P. 116–138.

31. *Gvozdevsky P.* Overgroups of Levi subgroups I. The case of abelian unipotent radical // St. Petersbg. Math. J. 2020. Vol. 31, no. 6. P. 969–999.

32. *Hazrat R.*, *Vavilov N.* K_1 of Chevalley groups are nilpotent // J. Pure Appl. Algebr. 2003. Vol. 179, no. 1/2. P. 99–116.

33. *Hazrat R.*, *Vavilov N.*, *Zhang Z.* Relative commutator calculus in Chevalley groups // J. Algebr. 2013. Vol. 385. P. 262–293.

34. *Humphreys J. E.* Linear Algebraic Groups. Vol. 21. New York, NY: Springer New York, 1975. P. 248. (Graduate Texts in Mathematics).

35. *Jantzen J. C.* Representations of algebraic groups, 2nd ed. Vol. 107. AMS, 2003. P. 576. (Mathematical surveys and monographs).

36. *King O.* On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group // J. Algebr. 1985. Vol. 96, no. 1. P. 178–193.

37. *King O.* On subgroups of the special linear group containing the special unitary group // Geom. Dedicata. 1985. Vol. 19, no. 3. P. 297–310.

38. *King O.* Subgroups of the special linear group containing the diagonal subgroup // J. Algebr. 1990. Vol. 132, no. 1. P. 198–204.

39. *Kleidman P. B.*, *Liebeck M. W.* The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups. Vol. 129. Cambridge University Press, 1990. P. x+303.

40. *Knus M.-A.* Quadratic and Hermitian Forms over Rings. Vol. 294. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. P. 524. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).

41. *Li S. Z.* $\mathrm{SL}(n, K)_L \otimes \mathrm{SL}(m, K)_R$ over a skewfield K. 1997.

42. *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(n, F)$ of a classical group over a subfield of F // Algebr. Colloq. 1994. Vol. 1, no. 4. P. 335–346.

43. *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(nr, F)$ of Certain Subgroups of $\mathrm{SL}(n, K)$, II. 1997.

44. *Li S. Z.* Overgroups in $\mathrm{GL}(U \otimes W)$ of certain subgroups of $\mathrm{GL}(U) \otimes \mathrm{GL}(W)$. II. 1997.

45. *Li S.* Overgroups in $\mathrm{GL}(nr, F)$ of certain subgroups of $\mathrm{SL}(n, K)$. I // J. Algebr. 1989. Vol. 125, no. 1. P. 215–235.

46. *Li S.* Overgroups in $\mathrm{GL}(U \otimes W)$ of certain subgroups of $\mathrm{GL}(U) \otimes \mathrm{GL}(W)$. I // J. Algebr. 1991. Vol. 137, no. 2. P. 338–368.

47. *Li S.* Overgroups of $\mathrm{SU}(n, K, f)$ or $\Omega(n, K, Q)$ in $\mathrm{GL}(n, K)$ // Geom. Dedicata. 1990. Vol. 33, no. 3. P. 241–250.

48. *Li S.* Overgroups of a unitary group in $\mathrm{GL}(2, K)$ // J. Algebr. 1992. Vol. 149, no. 2. P. 275–286.

49. *Li S.* Subgroup structure of classical groups (In Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publ., 1998.

50. *Liebeck M. W.*, *Seitz G. M.* On the subgroup structure of classical groups // Invent. Math. 1998. Vol. 134, no. 2. P. 427–453.

51. *Luzgarev A. Y.* On overgroups of $E(E_6, R)$ and $E(E_7, R)$ in their minimal representations // J. Math. Sci. 2006. Vol. 134, no. 6. P. 2558–2571.

52. *Luzgarev A. Y.* Overgroups of F_4 in E_6 over commutative rings // St. Petersbg. Math. J. 2009. Vol. 20, no. 6. P. 955–981.

53. *Luzgarev A. Y.* Overgroups of exceptional groups (in Russian). PhD Thesis: SPbU, St. Petersburg, 2008.

54. *Milne J. S.* Basic Theory of Affine Group Schemes. 2012.

55. *Nhat N. H. T.*, *Hoi T. N.* The Normalizer of the Elementary Linear Group of a Module Arising when the Base Ring is Extended // J. Math. Sci. 2018. Vol. 234, no. 2. P. 197–202.

56. *Nuzhin Y. N.* Groups contained between groups of Lie type over different fields // Algebr. Log. 1983. Vol. 22, no. 5. P. 378–389.

57. *Nuzhin Y. N.* Intermediate subgroups in the Chevalley groups of type B_l, C_l, F_4, and G_2 over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3 // Sib. Math. J. 2013. Vol. 54, no. 1. P. 119–123.

58. *Nuzhin Y. N.*, *Yakushevich A. V.* Intermediate subgroups of chevalley groups over a field of fractions of a ring of principal ideals // Algebr. Log. 2000. Vol. 39, no. 3. P. 199–206.

59. *Petrov V.* Decomposition of transvections: An algebro-geometric approach // St. Petersbg. Math. J. 2016. Vol. 28, no. 1. P. 109–114.

60. *Petrov V.*, *Stavrova A.* Elementary subgroups of isotropic reductive groups // St. Petersbg. Math. J. 2009. Vol. 20, no. 4. P. 625–644.

61. *Petrov V. A.* Supergroups of classical groups (in Russian). St. Petersburg State University: PhD Thesis, 2005. P. 129.

62. *Petrov V.* Overgroups of Unitary Groups // K-Theory. 2003. Vol. 29, no. 3. P. 147–174.

63. *Platonov V.*, *Đoković D.* Subgroups of $\mathrm{GL}(n^2, \mathbb{C})$ containing $\mathrm{PSU}(n)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1996. Vol. 348, no. 1. P. 141–152.

64. *Platonov V. P., Đoković D. Ž.* Linear preserver problems and algebraic groups // Math. Ann. 1995. Vol. 303, no. 1. P. 165–184.

65. *Plotkin E., Semenov A., Vavilov N.* Visual Basic Representations // Int. J. Algebra Comput. 1998. Vol. 08, no. 01. P. 61–95.

66. *Preusser R.* Sandwich classification for $GL_n(R)$, $O_{2n}(R)$ and $U_{2n}(R, \Lambda)$ revisited // J. Gr. Theory. 2018. Vol. 21, no. 1. P. 21–44.

67. *Preusser R.* Sandwich classification for $O_{2n+1}(R)$ and $U_{2n+1}(R, \Delta)$ revisited // J. Gr. Theory. 2018. Vol. 21, no. 4. P. 539–571.

68. *Preusser R.* Structure of Hyperbolic Unitary Groups II: Classification of E-Normal Subgroups // Algebr. Colloq. 2017. Vol. 24, no. 02. P. 195–232.

69. *Seitz G. M.* The maximal subgroups of classical algebraic groups // Mem. Am. Math. Soc. 1987. Vol. 67, no. 365.

70. *Shchegolev A. V.* Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in the classical symplectic group over an arbitrary commutative ring // St. Petersbg. Math. J. 2019. Vol. 30, no. 6. P. 1007–1041.

71. *Stepanov A.* A new look at the decomposition of unipotents and the normal structure of Chevalley groups // St. Petersbg. Math. J. 2017. Vol. 28, no. 3. P. 411–419.

72. *Stepanov A. V.* Nonstandard subgroups between $E_n(R)$ and $GL_n(A)$ // Algebr. Colloq. 2004. Vol. 10, no. 3. P. 321–334.

73. *Stepanov A.* Free product subgroups between Chevalley groups $G(\Phi, F)$ and $G(\Phi, F[t])$ // J. Algebr. 2010. Vol. 324, no. 7. P. 1549–1557.

74. *Stepanov A.* Subring subgroups in Chevalley groups with doubly laced root systems // J. Algebr. 2012. Vol. 362. P. 12–29.

75. *Stepanov A., Vavilov N.* Decomposition of Transvections: A Theme with Variations // K-Theory. 2000. Vol. 19, no. 2. P. 109–153.

76. *Suslin A. A.* On the structure of the special linear group over polynomial rings // Math. USSR-Izvestiya. 1977. Vol. 11, no. 2. P. 221–238.

77. *Taddei G.* Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau // Contemp. Math. T. 55. 1986. P. 693-710.

78. *Timmesfeld F. G.* Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-Type. Basel: Birkhäuser Basel, 2001. P. 389.

79. *Vaserstein L. N.* On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Tohoku Math. J. 1986. Vol. 38, no. 2. P. 219–230.

80. *Vaserstein L. N.* On the normal subgroups of GL_n over a ring // Lect. Notes Math. Vol. 854. Springer Berlin Heidelberg, 1981. P. 456–465.

81. *Vaserstein L. N.*, *Suslin A. A.* Serre's problem on projective modules over polynomial rings, and algebraic K-theory // Math. USSR-Izvestiya. 1976. Vol. 10, no. 5. P. 937–1001.

82. *Vavilov N.*, *Petrov V.* Overgroups of $\mathrm{EO}(2l, R)$ // J. Math. Sci. 2003. Vol. 116, no. 1. P. 2917–2925.

83. *Vavilov N. A.* Decomposition of unipotents for E_6 and E_7: 25 years after // J. Math. Sci. 2016. Vol. 219, no. 3. P. 355–369.

84. *Vavilov N. A.* On subgroups of split classical groups // Proc. Steklov Inst. Math. 1990. Vol. 183. P. 27–41.

85. *Vavilov N. A.* Subgroups of split classical groups (in Russian). Leningrad State Univ.: Dr. Sci. Thesis (Habilitationschrift), 1987. P. 334.

86. *Vavilov N. A.* Subgroups of Split Orthogonal Groups over a Commutative Ring // J. Math. Sci. 2004. Vol. 120, no. 4. P. 1501–1512.

87. *Vavilov N. A.* Subgroups of split orthogonal groups over a ring // Sib. Math. J. 1989. Vol. 29, no. 4. P. 537–547.

88. *Vavilov N. A.* Subgroups of symplectic groups that contain a subsystem subgroup // J. Math. Sci. 2008. Vol. 151, no. 3. P. 2937–2948.

89. *Vavilov N. A.* The structure of split classical groups over a commutative ring // Sov. Math. - Dokl. 1988. Vol. 37, no. 2. P. 550–553.

90. *Vavilov N. A.*, *Kazakevih V. G.* More variations on the decomposition of transvections // J. Math. Sci. 2010. Vol. 171, no. 3. P. 322–330.

91. *Vavilov N. A.*, *Luzgarev A. Y.* Normalizer of the Chevalley group of type E_6 // St. Petersbg. Math. J. 2008. Vol. 19, no. 5. P. 699–718.

92. *Vavilov N. A.*, *Luzgarev A. Y.* Normalizer of the Chevalley group of type E_7 // St. Petersbg. Math. J. 2016. Vol. 27, no. 6. P. 899–921.

93. *Vavilov N. A.*, *Perelman E. Y.* Polyvector representations of GL_n // J. Math. Sci. 2007. Vol. 145, no. 1. P. 4737–4750.

94. *Vavilov N. A.*, *Petrov V. A.* Overgroups of $\mathrm{EO}(n, R)$ // St. Petersbg. Math. J. 2008. Vol. 19, no. 02. P. 167–196.

95. *Vavilov N. A.*, *Petrov V. A.* Overgroups of elementary symplectic groups // St. Petersbg. Math. J. 2004. Vol. 15, no. 4. P. 515–543.

96. *Vavilov N. A.*, *Stepanov A. V.* Overgroups of semisimple groups // Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestv. Ser. 2008. Vol., no. 3. P. 51–95.

97. *Vavilov N.* Intermediate subgroups in Chevalley groups // Groups Lie Type their Geom. Cambridge University Press, 1995. P. 233–280.

98. *Wang X. T.*, *Hong C. S.* Overgroups of the elementary unitary group in linear group over commutative rings // J. Algebr. 2008. Vol. 320, no. 3. P. 1255–1260.

99. *Waterhouse W. C.* Automorphisms of $\det(X_{ij})$: The group scheme approach // Adv. Math. (N. Y). 1987. Vol. 65, no. 2. P. 171–203.

100. *Waterhouse W. C.* Automorphisms of quotients of $\prod GL(n_i)$ // Pacific J. Math. 1982. Vol. 102, no. 1. P. 221–233.

101. *Waterhouse W. C.* Introduction to Affine Group Schemes. Vol. 66. New York, NY: Springer New York, 1979. P. 164. (Graduate Texts in Mathematics).

102. *Waterhouse W. C.* Invertibility of linear maps preserving matrix invariants // Linear Multilinear Algebr. 1983. Vol. 13, no. 2. P. 105–113.

103. *You H.* Overgroups of classical groups in linear group over Banach algebras // J. Algebr. 2006. Vol. 304, no. 2. P. 1004–1013.

104. *You H.* Overgroups of classical groups over commutative rings in linear group // Sci. China Ser. A. 2006. Vol. 49, no. 5. P. 626–638.

105. *You H.* Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings // J. Algebr. 2004. Vol. 282, no. 1. P. 23–32.

106. *Lubkov R.* The reverse decomposition of unipotens in polyvector representations. 2022. Preprint, J. Math. Sci.

107. *Lubkov R.*, *Stepanov A.* Subgroups of Chevalley groups over rings // J. Math. Sci. 2021. Vol. 252, no. 6. P. 829–840.

108. *Lubkov R. A.*, *Nekrasov I. I.* Explicit Equations for Exterior Square of the General Linear Group // J. Math. Sci. 2019. Vol. 243, no. 4. P. 583–594.

109. *Lubkov R.* Overgroups of elementary groups in polyvector representations. 2022. Preprint `https://arxiv.org/abs/2203.13683`.

110. *Lubkov R.* The reverse decomposition of unipotents for bivectors // Commun. Algebr. 2021. Vol. 49, no. 10. P. 4546–4556.